

GENERAZIONE DI TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE PARTICOLARI (Generation of particular Pithagorean Primitive Triples)

Sommario: nel presente articolo viene proposto ed illustrato un nuovo algoritmo per il calcolo e la generazione di terne pitagoriche primitive aventi cateti la cui differenza è pari ad un qualsiasi valore N scelto in un definito campo di valori numerici, ad esempio tra 1 e 10^{12} . Per avere dei risultati concreti con l'utilizzo di tale algoritmo, si sono realizzati due programmi scritti in linguaggio Qbasic. Il primo programma (allegato1) è dedicato per un dato N alla generazione, se esistono, delle relative terne primitive. Con questo programma viene calcolato e generato per il considerato valore di N un limitato numero di terne, precisamente quelle che si possono calcolare in modo esatto sino alla cifra delle unità. Poiché nelle operazioni aritmetiche viene utilizzata la sola doppia precisione le terne generate e presentate sono solo quelle che hanno i valori dei cateti e dell'ipotenusa composti ciascuno da non più di 15 cifre. Il secondo programma (Allegato 2), è dedicato alla generazione di terne con cateti e ipotenusa di valore elevato in quanto le operazioni aritmetiche vengono eseguite con una adeguata aritmetica a precisione multipla anche qui con l'introduzione di un N qualsiasi scelto entro il campo $1 \div 10^{12}$ di possibili suoi valori. Eseguendo questo programma si scopre innanzitutto se per il valore scelto N esistono terne primitive o meno: se non esistono si termina il programma; se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusa e dei cateti relativi alla ennesima terna primitiva prescelta, ad esempio la 10000^a terna, prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusa. Un pregio dell'algoritmo è senz'altro quello della rapidità di tempo con cui si possono avere i risultati di terne aventi i valori numerici dei cateti e dell'ipotenusa costituiti anche da migliaia di cifre.

Abstract: in this paper we propose and explain an new algorithm for the particular pithagorean primitive triples computation and generation. These triples have the N value as difference between the legs. This gap can have any value between 1 and 10^{12} . We obtain actual results by the implementation of two programs in Qbasic language. The former (Allegato 1) considers the generation of possible primitive triples pertinent to requested N and compute and produce only the restricted number of primitive triples, calculated exactly until the least significant digit. Indeed in this program we use only the double - precision arithmetic and we have exact results for triples with hypotenuse and leg, that have numerical values with a digit number ≤ 15 . The second program (Allegato 2) is pertinent to computation and generation of triples with the legs and the hypotenuse having as well big values, because we employ a multiple-precision arithmetic. In this program, introducing any chosen N value in the range $1 \div 10^{12}$ we find if for this N there are primitive triples or not. If so we compute the big numerical values of hypotenuse and legs relative to the n th selected triple, for example the ten thousandth triple, considering for the triples serial number the increasing hypotenuse value. The merit of this algorithm is the time rapidity for the numerical values achievement.

1 - Introduzione

In articoli comparsi recentemente su questo Sito [Fi]; [Dm] si è parlato di terne pitagoriche, del problema di trovare terne particolari e di calcolare con metodi efficienti i triangoli rettangoli aventi cateti la cui lunghezza è data da numeri interi consecutivi. Qui ci occuperemo di un problema analogo, ma più generale rivolto sempre a considerare terne particolari ed al calcolo dei loro valori numerici.

Le terne che prenderemo in considerazione saranno quelle che possiedono insieme le tre seguenti caratteristiche:

- 1) - terne con l'ipotenusa e cateti costituiti da numeri interi
- 2) - terne per le quali la differenza fra i valori numerici dei due cateti è un valore numerico prefissato N , da poter scegliere fra un qualsiasi valore nel campo $1 \leq N \leq N_m$ con N_m ad esempio pari a 10^{12}
- 3) - terne denominate primitive, cioè quelle con cateti ed ipotenusa non aventi fattori comuni, cioè primi fra loro.

Prima di passare a calcolare ed a trovare i valori numerici esatti, anche elevati, dei cateti e della ipotenusa, risulta necessario individuare per quali valori di N esistono Terne con i requisiti richiesti. In TABELLA 1 si riportano ad esempio nel campo esplorato da 1 a 100 i valori di N solo in corrispondenza dei quali esistono terne primitive; in essa sono anche mostrati per ciascun N i valori della ipotenusa e dei cateti riguardanti la **terna primitiva** avente i valori numerici più piccoli

TABELLA 1

N	ipotenusa	cateto minore	cateto maggiore
1	5	3	4
7	13	5	12
17	25	7	24
23	37	12	35
31	41	9	40
41	85	36	77
47	65	16	63
71	85	13	84
73	125	44	117
79	101	20	99
89	149	51	140
97	113	15	112

Con l'algoritmo che si va a proporre la ricerca della esistenza di tale tipo di **terna primitiva** può effettuarsi in un tempo molto contenuto per un qualsiasi N anche elevato entro il campo di esplorazione menzionato in 2).

In TABELLA 2 si riportano alcuni altri esempi di valori N scelti nel campo $1 \div 10^{12}$ per ciascuno dei quali esistono terne primitive; per ciascun N i valori riportati della ipotenusa e dei cateti sono relativi alla **prima terna primitiva**, quella cioè avente l'ipotenusa più piccola.

TABELLA 2

N	ipotenusa	cateto minore	cateto maggiore
829	901	60	899
6991	11105	3536	10527
49871	80609	26320	76191
123457	142705	18096	141553
1234567	1441765	66985061	161450580
42221143	48424157	5848532	48069675
94465519	174794989	66985061	161450580
889901311	1469863201	494487840	1384189151
1000000007	1292045917	264651108	1264651115
9098765431	10249593625	1092443376	10191208807
1000000000007	1309432666813	279299014788	1279299014795

Si può facilmente verificare che i valori numerici dell'ipotenusa e dei cateti posti sulla stessa riga non hanno fra loro fattori in comune, sono cioè coprimi, come infatti deve essere. Pertanto ogni terna riportata in tabella è di tipo primitivo.

2 - Illustrazione dell' algoritmo

2.1 formule di Euclide e equazioni diofantee

Illustriamo ora l'algoritmo partendo dalle seguenti formule relative all'ipotenusa ed ai cateti di un triangolo rettangolo, formule già note dall'antica Grecia (Euclide, Diofanto) [Be], [Da], [CR], [H.W.]:

cateto 1: $C1 = m^2 - n^2$; cateto 2: $C2 = 2 \cdot m \cdot n$; ipotenusa: $A = m^2 + n^2$
dove m e n sono numeri interi positivi

Per le terne pitagoriche che vogliamo considerare, vale a dire per quelle terne che hanno i cateti che differiscono di un valore N cioè $N = |C1 - C2|$ od anche $C1 - C2 = \pm N$ si ha :

$$m^2 - n^2 = 2 \cdot m \cdot n \pm N \quad \text{equivalente a} \quad m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n - 2 \cdot n^2 = \pm N$$

che è conveniente scrivere come segue: $(m - n)^2 - 2 \cdot n^2 = \pm N$

posto $x = m - n$ ed $y = n$ risulta la seguente relazione:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = \pm N$$

che rappresenta le due equazioni quadratiche indeterminate:

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = N \quad (1)$$

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = -N \quad (2)$$

Per ognuna di esse occorrerà trovare per le incognite x e y i valori numerici interi minimi che la soddisfano. Una volta trovati tali valori, essendo $m = x + y$ e $n = y$ si potrà risalire ai valori dei cateti $C1$, $C2$ e della ipotenusa A tramite le formule sopra dette:

$$C1 = (x + y)^2 - y^2 ; \quad C2 = 2 \cdot (x + y) \cdot y ; \quad A = (x + y)^2 + y^2$$

2.2 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$

Per trovare i più piccoli valori per x ed y che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$, dato che il coefficiente di y^2 è piccolo ed il valore di N da prendere in considerazione è relativamente piccolo (massimo valore di N preso in esame $N_m = 10^{12}$) si può fare ricorso alla ricerca esaustiva (brute – force search) dei suddetti valori impiegando anche così un tempo di calcolo breve in quanto, indicati con x_1 e y_1 rispettivamente il più piccolo valore positivo per x ed il più piccolo valore positivo per y che soddisfano l'equazione (1), essi devono trovarsi se esistono nel seguente campo limitato di interi [Fr], [Na], [Ro]:

$$\text{per } x \quad 1 < x_1 < \sqrt{2 \cdot N}$$

$$\text{per } y \quad 1 < y_1 < \sqrt{\frac{N}{2}}$$

Se entro i campi suddetti non si trovasse nessun valore di x o di y tali da soddisfare l'equazione (1) si può concludere che essa non è risolvibile. Si noti che la ricerca di y_1 anche per valori di N dell'ordine di 10^{12} è ristretta ad un valore non superiore a 707106

Ad esempio per $N = 10^{12} + 7$ i valori di x_1 e y_1 che soddisfano la (1) sono i seguenti:

$x_1 = 1014955$ $y_1 = 122747$ come si può facilmente verificare. Il tempo di calcolo per trovare tali valori risulta al massimo di qualche decimo di secondo (vedi più sotto Esempio1) anche con l'utilizzo di un microprocessore non particolarmente sofisticato.

Se tuttavia si prende in considerazione un valore N per il quale non esistono terne primitive occorrerà esplorare per y tutto il suddetto campo: ad esempio per $N = 10^{12} + 3$ si dovrà andare a

saggiare y fino al valore $\sqrt{\frac{N}{2}} = 707106$ con un tempo al massimo di qualche decimo di secondo

(< 0.8 secondi) col normale computer commerciale utilizzato nei programmi sotto riportati.

Una volta trovati x_1 e y_1 per calcolare i successivi valori di x e y che soddisfano la (1) in modo da rendere molto veloce il loro calcolo si possono utilizzare le seguenti originali formule iterative:

$$x_k = x_{k-1} + 2 \cdot y_{k-1} \quad (3)$$

$$y_k = x_{k-1} + y_{k-1} \quad (4)$$

con $k = 2, 3, 4, \dots$ e dove i valori iniziali x_1 e y_1 sono gli interi positivi più piccoli, trovati con la ricerca esaustiva che soddisfano la (1).

Non è infatti difficile dimostrare per induzione quanto segue :

a) oltre i valori iniziali x_1 e y_1 , i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici dispari di k , cioè i valori x_3, x_5, x_7, \dots ed i corrispondenti valori y_3, y_5, y_7, \dots sono valori che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ (1)

b) i valori di x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k , cioè x_2, x_4, x_6, \dots ed i corrispondenti y_2, y_4, y_6, \dots sono valori che soddisfano l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

2.3 - Considerazioni sull'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

Analogamente per l'equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ tramite sempre una ricerca esaustiva i più piccoli interi positivi x_1 e y_1 che soddisfano l'equazione, se esistono, devono trovarsi nel seguente campo di valori [Fr],[Na][Ro]:

$$\text{per } x \quad 1 < x_1 < \sqrt{NA}$$

$$\text{per } y \quad \sqrt{\frac{NA}{2}} < y_1 < \sqrt{NA}$$

dove $NA = |-N|$

essendo il campo di ricerca anche qui abbastanza limitato si possono rapidamente trovare tali valori. (vedi esempio 1)

Prendendo in considerazione sempre le formule iterative (3) e (4) e considerando i valori positivi più piccoli di x e di y soddisfacenti la (2) quali valori iniziali x_1 e y_1 risulta anche qui che:

a1) oltre i valori iniziali x_1 e y_1 , i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi

agli indici dispari di k , cioè i valori x_3, x_5, x_7, \dots ed i corrispondenti valori y_3, y_5, y_7, \dots

sono valori che soddisfano la $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$

b1) i valori x_k e y_k trovati con le formule suddette relativi agli indici pari di k , cioè

x_2, x_4, x_6, \dots ed i corrispondenti y_2, y_4, y_6, \dots sono valori che soddisfano l'equazione

$$x^2 - 2 \cdot y^2 = N$$

2.4 - Calcolo delle terne pitagoriche primitive

Tenendo ora presente le formule di Euclide e che $m = x + y$ ed $n = y$, si possono innanzitutto trovare i valori dei cateti e dell'ipotenusa della **terna pitagorica più piccola** che presenta le caratteristiche 1) e 2) sopra enunciate:

$$C1_1 = (x_1 + y_1)^2 - y_1^2 \quad C2_1 = 2 \cdot (x_1 + y_1) \cdot y_1 \quad A_1 = (x_1 + y_1)^2 + y_1^2$$

Per controllare inoltre se la terna risulta avere anche caratteristica 3), cioè se essa è primitiva, occorre verificare che i valori $(x_1 + y_1)$ e y_1 siano fra loro primi e non entrambi dispari [C.R] [Sh]. Poiché conosciamo, per quanto illustrato sopra, i successivi valori x_k e y_k soddisfacenti l'equazione, potremo ricavare con l'utilizzo delle formule iterative (3) e (4) tutte le altre terne pitagoriche anch'esse, come è facile dimostrare, tutte primitive, eseguendo i seguenti due cicli di istruzioni scritti qui linguaggio QBasic:

1° ciclo, relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = N$ con $x = x_1$ e $y = y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```

x = x1 : y =y1
FOR h = 2 to n
  x0 = x
  x = x + 2 * y
  y = x0 + y
  m = x + y : n = y
  A = m ^ 2 + n ^ 2
  C1 =2 * m * n :
  C2 = m ^ 2 - n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k

```

2° ciclo, relativo alla equazione $x^2 - 2 \cdot y^2 = -N$ con $x = x_1$ e $y = y_1$ quali valori interi positivi più piccoli soddisfacenti tale equazione:

```

x = x1 : y =y1
FOR h = 2 to n
  x0 = x
  x = x + 2 * y
  y = x0 + y
  m = x + y : n = y
  A = m ^ 2 + n ^ 2
  C1 =2 * m * n :
  C2 = m ^ 2 - n ^ 2
  PRINT k ; x, y, A ; C1 ; C2
NEXT k

```

Si vuol mettere in evidenza che è necessario effettuare la ricerca dei valori di m e di n e quindi dei valori della ipotenusa e dei cateti sia per il valore $+N$ che per il valore $-N$, in quanto, ad eccezione di $N = \pm 1$, si ottengono differenti valori nell'uno e nell'altro caso (vedasi per chiarire quanto detto i risultati riportati nell'**Esempio 3** relativo a $N = \pm 47$)

Per $N = \pm 1$ risulta però sufficiente effettuare la ricerca solo per il valore $N = -1$.

Può anche risultare che per il valore positivo di N esistono terne primitive mentre per il valore negativo di N non esistono terne primitive o viceversa. Ad esempio per $N = 343$ esistono terne primitive mentre per $n = -343$ non esistono. Viceversa per $N = 3577$ non ci sono terne primitive mentre per $N = -3577$ esistono terne primitive.

Per avere dei risultati concreti si sono sviluppati due programmi in linguaggio Qbasic che presentano le prestazioni desiderate.

Con il 1° programma (**ALLEGATO 1**), dove ci si limita ad utilizzare la aritmetica a doppia precisione offerta dal software del QBASIC, introducendo un N qualsiasi ($N =$ differenza di valore fra i due cateti) entro il campo $1 \div 10^{12}$ di suoi possibili valori ed eseguendo il programma, si scopre innanzitutto se le terne relative a tale N sono primitive o meno: se non sono primitive si termina il programma. Se invece esistono terne primitive si trova un limitato numero di terne primitive relative sia al valore $+N$ che al valore $-N$, partendo a presentare per ognuna delle due serie di terne i risultati numerici dalla terna avente **l'ipotenusa di più piccolo valore**.

In effetti ci si limita a trovare ed a mostrare solo quelle terne che presentano valori numerici esatti sino alla cifra delle unità in quanto con l'uso della l'aritmetica a doppia precisione si ottengono nei calcoli risultati esatti solo se essi sono costituiti da non più di 15 cifre.

Si riporta qui di seguito qualche esempio di quello che compare sullo schermo del monitor eseguendo il programma .

Esempio 1

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 889701311
 le terne relative a 889701311 sono primitive
 valori iniziali: x = 31231 y = 6545

1	1469863201	494487840	1384189151
2	8166943585	6202592544	5312891233
3	47531798309	33162262180	34051963491
4	277023846269	196329785780	195440084469
5	1614611279305	1141257647256	1142147348567
6	9410643829561	6654774903000	6653885201689
7	54849251698061	38783832965500	38784722666811
8	319684866358805	226051781695244	226050891993933
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

 le terne relative a -889701311 sono primitive
 valori iniziali: x = 18141 y = 24686

1	2443550525	2114454644	1224753333
2	14009067529	9451062360	10340763671
3	81610854649	58150724760	57261023449
4	475656060365	335894480956	336784182267
5	2772325507541	1960774966220	1959885264909
6	16158296984881	11425196511120	11426086212431
7	94177456401745	66593962905744	66593073204433
8	548906441425589	388135022118100	388135911819411
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

PRIME 16 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 889701311
 tempo di calcolo: 0 secondi

Esempio 2

Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 100000000007
 le terne relative a 100000000007 sono primitive;
 valori iniziali: x = 1014955 y = 122747

1	1309432666813	279299014788	1279299014795
2	7045494059605	5456762378004	4456762377997
3	40963531690817	28461275253208	29461275253215
4	238735696085297	169310889141272	168310889141265
5	1391450644820965	983404059594396	984404059594403
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

 le terne relative a -100000000007 sono primitive;
 valori iniziali: x = 499521 y = 790418

1	2288703238445	2039182009004	1039182008997
2	13022837751337	8694952503888	9694952503895
3	75848323269577	54130533014352	53130533014345
4	442067101866125	312088245582196	313088245582203
TERNA	IPOTENUSA	CATETO	CATETO

PRIME 9 TERNE PRIMITIVE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 100000000007
 tempo di calcolo: .21875 secondi

Esempio 3

Se per il valore $|N|$ scelto quale differenza fra i due cateti non esistono terne pitagoriche primitive eseguendo il programma sullo schermo del monitor comparirà un risultato come quello qui presentato per $|N| = 3$

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 3
per N = 3 NON ci sono TERNE PRIMITIVE
```

Esempio 4

```
Quale differenza N vuoi fra i due cateti? 47
le terne relative a 47 sono primitive;
valori iniziali: x = 7   y = 1
1          65   16   63
2          353  272  225
3          2053 1428  1475
4          11965 8484  8437
5          69737 49288 49335
6          406457 287432 287385
7          2369005 1675116 1675163
8          13807573 9763452 9763405
9          80476433 56905408 56905455
10         469051025 331669184 331669137
11         2733829717 1933109508 1933109555
12         15933927277 11266988052 11266988005
13         92869733945 65668818616 65668818663
14         541284476393 382745923832 382745923785
15         3154837124413 2230806724188 2230806724235
16         18387738270085 13002094421484 13002094421437
17         107171592496097 75781759804528 75781759804575
18         624641816706497 441688464405872 441688464405825
TERNA          IPOTENUSA          CATETO          CATETO
```

```
-----
le terne relative a -47 sono primitive;
valori iniziali: x = 5   y= 6
1          157   132   85
2          905   616   663
3          5273  3752  3705
4          30733 21708  21755
5          179125 126684  126637
6          1044017 738208  738255
7          6084977 4302752  4302705
8          35465845 25078116  25078163
9          206710093 146166132  146166085
10         1204794713 851918488  851918535
11         7022058185 4965344984  4965344937
12         40927554397 28940151228  28940151275
13         238543268197 168675562572  168675562525
14         1390332054785 983113224016  983113224063
15         8103449060513 5730003781712  5730003781665
16         47230362308293 33396909466068  33396909466115
17         275278724789245 194651453014884  194651453014837
TERNA          IPOTENUSA          CATETO          CATETO
```

```
PRIME 35 TERNE CON DIFFERENZA FRA I CATETI PARI A 47
tempo di calcolo: .046875 secondi
```

Considerando sempre il programma in **Allegato 1**, con semplici modifiche ed opportune istruzioni da effettuare su di esso si possono ricavare entro uno scelto campo di valori tutti e soli i valori di N per i quali esistono terne pitagoriche primitive, come pure il loro numero e la loro percentuale

rispetto al totale dei valori esplorati. Ad esempio nel campo esplorato $40001 \div 5000$ si può ottenere sullo schermo del monitor il riquadro sottostante in cui compaiono tutti e soli i valori positivi e negativi di N per i quali esistono terne primitive con una percentuale de 9.5 % per valori positivi di N e del 9.2% per valori negativi di N

```

da quale N iniziale ? 4000
a quale N finale ? 5000
Valori di | N | fra 4000 e 5000 per i quali ci sono terne pitagoriche primitive:

4001 4007 4039 4049 4057 4063 4073 4079 4097 4111 4127 4129 4151
4153 4159 4177 4183 4193 4201 4207 4217 4223 4231 4241 4247 4249
4271 4273 4289 4297 4319 4327 4337 4361 4369 4391 4393 4409 4417
4423 4439 4441 4447 4457 4463 4471 4481 4487 4513 4519 4529 4559
4561 4567 4577 4583 4591 4607 4633 4639 4649 4657 4663 4673 4679
4681 4703 4711 4721 4729 4751 4753 4759 4777 4783 4793 4799 4801
4817 4831 4841 4871 4879 4889 4903 4913 4919 4937 4943 4951 4967
4969 4991 4993 4999
numero di valori positivi di N per i quali vi sono terne primitive: 95
-----
-4001 -4007 -4039 -4049 -4057 -4063 -4073 -4079 -4097 -4111 -4127 -4129 -4151
-4153 -4159 -4177 -4183 -4193 -4201 -4207 -4217 -4223 -4231 -4241 -4247 -4249
-4271 -4273 -4289 -4297 -4319 -4327 -4337 -4369 -4391 -4393 -4409 -4417 -4423
-4439 -4441 -4447 -4457 -4463 -4471 -4481 -4487 -4513 -4519 -4529 -4559 -4561
-4567 -4577 -4583 -4591 -4607 -4633 -4639 -4649 -4657 -4663 -4673 -4679 -4681
-4703 -4711 -4721 -4729 -4751 -4759 -4777 -4783 -4793 -4799 -4801 -4817 -4831
-4841 -4871 -4879 -4889 -4903 -4919 -4937 -4943 -4951 -4967 -4969 -4991 -4993
-4999
numero di valori negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 92
numero totale di valori positivi e negativi di N per i quali vi sono terne primitive: 187

```

Con il 2° programma (**Allegato 2**), dove le operazioni aritmetiche vengono eseguite con una adeguata aritmetica a precisione multipla anche qui introducendo un N qualsiasi (N = differenza di valore fra i due cateti) entro il campo $1 \div 10^9$ di possibili suoi valori ed eseguendo il programma si scopre innanzitutto se le terne relative a tale N sono primitive o meno: se non sono primitive si termina il programma, se invece esistono si vanno a calcolare i valori anche molto grandi della ipotenusa e dei due cateti relativi alla **terna ennesima primitiva prescelta**, prendendo in considerazione per l'ordine delle terne il valore crescente della ipotenusa.

Qui di seguito si mostra nella TABELLA 4 qualche esempio riguardante i tempi necessari per il calcolo dei valori numerici dell'ipotenusa e dei cateti riguardanti la terna ennesima prescelta in relazione al valore N considerato, dando anche il numero di cifre di cui risulta composto il valore della ipotenusa.

TABELLA 4

N	TERNA	n° cifre ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
123457	100 ^a	44	immediato
123457	500 ^a	197	0.06
123457	1000 ^a	388	0.1
123457	5000 ^a	1919	1.5
123457	10000 ^a	3833	5.5
123457	15000 ^a	5747	11.9
123457	20000 ^a	7661	20.8
123457	30000 ^a	11489	45.5
123457	40000 ^a	15316	80.5
123457	50000 ^a	19144	124.3

Nella TABELLA 5 vengono riportati per diversi valori di N il numero di cifre che compongono il valore numerico dell'ipotenusa ed il tempo impiegato per il calcolo dei valori dell'ipotenusa e dei cateti relativi alla 10000^a terna primitiva

TABELLA 5

N	TERNA	n° cifre della Ipotenusa	tempo di calcolo (secondi)
1	10000 ^a	7656	20.9
7	10000 ^a	3829	5.49
41	10000 ^a	3829	5.49
829	10000 ^a	3831	5.49
6991	10000 ^a	3832	5.5
49871	10000 ^a	3833	5.49
123457	10000 ^a	3833	5.5
1234567	10000 ^a	3834	5.48
54267337	10000 ^a	3836	5.5
94465519	10000 ^a	3836	5.5
889701311	10000 ^a	3837	5.5
1000000007	10000 ^a	3837	5.54
57485271799199	10000 ^a	3847	7.80

Si riportano alcuni risultati ottenibili con il programma dell'ALLEGATO 2

1° ESEMPIO: riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla 1000^a terna con differenza fra i cateti pari a $N = \pm 103$

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 1000 -esima

quale differenza N vuoi fra i cateti ? 103

per $N = 103$ si hanno terne primitive

valori iniziali per $N = 103$: $x = 11$ $y = 3$

per $N = -103$ si hanno terne primitive

valori iniziali per $N = -103$: $x = 5$ $y = 8$

valore del CATETO 1

1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
 2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
 3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
 6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
 5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
 4911660 4924233 0348447 2746021 0140584

numero di cifre del cateto 1: 385

valore del CATETO 2

1644201 5637823 9060551 1515357 4468539 1049083 0561460 5969490 1538214 4359910
 2889365 3856094 6921009 9013590 9774860 5329182 0099160 5175905 0629035 6028735
 3693480 2115155 7706243 9901304 9899228 6023473 7174635 5250427 6678436 2482503
 6421106 7035065 8761392 4187496 8031438 1545012 4638040 7698016 9479649 4196608
 5121192 9529669 2445022 9088390 4431030 4589031 5054645 8531511 0489618 4803549
 4911660 4924233 0348447 2746021 0140687

numero di cifre del cateto 2: 385

valore dell'IPOTENUSA

2325252 1507761 0827377 4980904 2029816 2819676 8996621 8332120 4726288 2004174
 0044324 1456420 5807270 0081609 1220733 0082069 2606560 5556111 7193162 9244254
 5595893 4630823 1217341 1898932 6996158 3921470 8740126 0291884 3751341 2904564
 4845349 1195895 9596652 7361972 8585828 4646977 7676020 7628168 9986979 0602651
 1912006 2672002 1452076 4504238 2438561 1192231 8511338 4038987 1961459 5666901
 4989701 6649695 6520050 1864493 4060305

numero di cifre dell'ipotenusa: 385

tempo di calcolo: 0. 05078125 secondi

2° ESEMPIO : riguarda il calcolo dei valori dei cateti e della ipotenusa relativi alla 2000^a terna con differenza fra i cateti pari a $N = \pm 7$

quale terna n-esima vuoi visualizzare? 2000

quale differenza N vuoi fra i cateti? 7

le terne sono primitive

valori iniziali per $N = 7$: $x = 3$ $y = 1$

le terne sono primitive

valori iniziali per $N = -7$: $x = 1$ $y = 2$

valore del CATETO 1

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
 7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
 9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
 4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
 6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
 9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
 4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
 2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
 7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
 3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
 8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746612

numero di cifre del cateto 1: 766

valore del CATETO 2

718 1938478 8237243 9955152 7671394 5614062 3917917 1531055 9848138 2770597
 7785888 1164096 6436498 3415616 9844018 6176412 9280191 6942875 7683967 8350633
 9769508 2574673 4409251 2690549 6483646 3630090 7283649 2138464 9298984 5034896
 4722689 8350308 3391193 9209655 1007210 2645582 2028974 0093524 4206256 5797181
 6827706 3459290 2339492 6399239 0567629 2701261 7251199 3667102 5086182 7956428
 9839174 1041758 6087409 0673114 0554256 3957060 4217857 1664157 9635455 7617180
 4393078 7550201 7093375 8398900 1023223 5628914 4018126 6429805 3124482 0623105
 2696136 2167541 4896509 9717260 3133125 3483191 6160913 7836830 5776318 0305096
 7204442 5893198 3271796 0806959 6135579 6795238 2792111 4773690 7828297 9690485
 3119118 5043088 9297639 1507827 0704520 7484193 4154621 1311714 0628401 4832064
 8146373 7512702 4518012 2971098 7599015 5498809 9501922 1771191 9102319 3746605

numero di cifre del cateto 2: 766

valore dell'IPOTENUSA

1015 6794800 8817065 4044354 0685534 6479229 9657817 5518931 1237925 7420391
 9267558 7315259 5545129 7997905 5108074 3559913 1340541 0669820 5683725 8283459
 7661623 5338190 7465278 8042077 3757564 0211283 2873389 7438386 6688387 2655013
 5942008 7976878 7475885 7108758 1899560 5759659 7257616 1234542 5286881 8993285
 2463631 1028017 5422419 1137322 0446318 7422909 4334690 7146653 2805173 6032978
 9648820 4950397 2369653 9651070 3516128 8365592 4938140 0670861 9302671 7648845
 7521912 4360998 6018955 7433586 5483355 5292564 6111423 2311012 4376126 1326294
 2467356 1404083 3700635 9871605 3040404 1041218 3189869 9758432 3613303 2614355
 7712571 7533203 1395185 7799098 6215760 5178724 1794334 1756151 6123991 3527775
 4032195 9250844 7641286 0954239 1433792 7205673 2308933 0231278 1803536 6540928
 5813534 0496547 1721851 6014953 5501169 4459286 7430711 2746442 7916772 3159413

numero di cifre dell'ipotenusa: 767

tempo di calcolo : 0.28 secondi

3 °Esempio si visualizza sullo schermo del monitor innanzitutto quanto segue:

quale terna n -esima vuoi visualizzare? 15000 - esima
 quale differenza N vuoi fra i cateti ? 329
 per N = 329 si hanno terne primitive
 valori iniziali per N = 329 : x = 19 y = 4
 per N = -329 si hanno terne primitive
 valori iniziali per N = -329 : x = 3 y = 13

vengono quindi calcolati in un tempo inferiore a 12 secondi i valori numerici relativi ai cateti ed alla ipotenusa della 15000 – esima; questi valori molto grandi vengono mostrati sullo schermo del monitor tramite diverse visualizzazioni. Qui di seguito vengono mostrati in carattere tipografico opportuno i suddetti valori numerici.

valore del CATETO 1

2718 43984567031203 3486970 4054845 2758187 7208124 9939009 3482131 1867150 9921792 6183668 2714108 7673843
 8140677 5931704 6089631 7356594 4748667 5331231 3878491 3355641 8219036 8912237 0817720 5023383 1373447 3820376
 9423609 6920536 4128598 0184732 0962218 8648566 7140086 8671272 6011403 8392587 7432296 5467660 5276730 6333774
 7848972 0012606 1918850 6931879 7202354 2111679 0192267 1945469 9074678 0339486 8611516 1187134 3663685 6389868
 3108001 8258010 9928684 2246200 3081211 9116260 0663121 5308857 4890897 1777561 8633812 4537898 9197698 1209931
 0327833 6895739 9382690 5815307 1437156 3666486 4266138 9800810 5068462 4703839 8962225 5003872 5398998 8286831
 2325522 2477297 7888045 8025596 4749810 7785381 7466971 0329518 9300927 2725548 5116472 2406683 1196236 6619595
 9579917 9993137 7652444 3638554 1084595 3117902 9076566 6921279 8729726 3903658 1379017 4805721 1662368 5668413
 5147070 3414387 6973520 2892705 3218782 3146188 7291880 0265120 2924673 7310938 5350485 7812682 5550134 1350678
 5215387 5403878 7515952 0458924 8778429 8386185 4533831 1163445 0129301 5450237 8916680 5389054 5156200 9633968
 5589180 6356475 6935163 9282307 4283666 0415808 2997307 3112147 3657112 5700570 9589923 0125092 3567661 4030758
 4263464 5579804 1738394 5771181 3837330 0516940 2757437 3420199 3742981 2602477 7019991 2436346 4518413 6526382
 3656975 2577240 9952447 0666305 9180935 8566035 5637278 1154647 4466795 1936868 9488425 4478803 7538772 2854298
 3441035 2997238 5912847 3856976 6260545 0036609 9956262 6480417 9088371 9849486 1057179 8782556 1078991 8968039
 6983951 3905896 8130759 6819377 8761537 5687878 2474228 9783835 4380182 7076792 7611467 9622267 9759984 9280922
 8309874 8190167 9835671 5940312 2077733 7195669 6704459 0048264 9993688 7984485 2998918 7377546 5793042 3121955
 1292077 8662246 6339964 7999517 1394221 6736465 3218824 3557738 0278629 3182459 7614059 8849328 3933056 1728703
 0048574 6930750 5283792 9865338 9600664 1285122 5891920 9555165 2478076 4148888 4935710 7423250 9654083 1356489
 0145543 2732876 2484490 9024728 2497985 7297900 9047582 6536240 3517783 5556688 7268667 0519814 9577755 2288140
 7310595 6443036 4484237 0414962 0159811 7084071 6960658 1986574 5000536 7192901 3635812 6358910 7341026 9254450
 2559044 1279384 8112828 2668524 8240901 6226633 2004374 9018827 3919922 6798673 4522124 2110496 0537596 4722071
 0289376 2452945 0710738 1743367 1718227 1185209 6299957 8429524 2484395 0788233 8654350 0804729 6785525 6396860
 5253879 1110165 7351570 1153148 2215196 9329425 5061709 6196752 3556435 3678429 7337014 5501931 9723879 0504359
 4530782 1596417 4519658 4487137 9085704 6357245 8385831 6947210 3249438 1059521 4189701 2903914 6835578 6264050
 1739117 3645715 2106811 3637250 4668284 9377535 7788914 4117561 7393895 8570887 0557964 8595340 2960359 1513573
 4532182 0378454 9845743 7273744 9428688 2882880 8534711 1982953 5011807 9826105 7728692 2624748 2654143 4362279
 7209760 1236305 9349769 7671864 3646790 8437858 3355177 3525932 2998342 7270650 4499279 9319916 5798010 0592781
 3991189 5711085 4912029 9988882 2630914 1985376 2335687 0862464 5525548 9343658 8070723 8690069 9031913 9615215
 4649364 7329587 3904409 7892025 2956622 8202345 2886492 3109766 6366689 0169555 7193523 7216463 3986689 7260472
 3334872 3187239 9715913 6809458 7350125 5941857 8127310 7998836 8379768 3185675 4828245 3919474 7857921 7302172
 8331825 1809577 2912455 9103358 7180072 1826536 2280666 7897860 6098507 2332966 6297697 5334167 6835636 4709001
 4573956 7568563 9602487 3654127 6922685 1787607 6184519 5892587 6589923 5623433 0359450 0426095 8868978 3760551
 2321090 4341072 4197398 4875793 0889727 1299803 9189292 8871188 4825487 6418417 9872511 5791414 5484392 6376829
 0108380 9168009 0137099 4288059 5863506 5676121 6882270 0373950 0620146 0811864 6133964 1572680 2844392 7634504
 0344637 4332916 7131112 9676564 4788181 3518411 7135525 6244292 3370307 3067235 7996312 8529718 8502533 8586091
 7626300 5576346 7319921 8845610 1028762 8496680 8519246 3861052 9675237 6995697 8655961 2518857 0295796 5544743
 6806463 1171239 5796379 0644963 2687251 95513973183485 2027603 5431763 0207659 8524988 9406765 0139568 1037082
 0327523 1596572 8871201 4116631 1923070 2021842 8458732 4566097 1497741 3680867 1136969 4490150 7996255 6399936
 5438062 0577481 9665562 0721973 9459294 2208046 2836770 9150176 7713040 4764419 1588604 1809118 5809716 4436479
 1382042 9146159 2663573 7409050 0988759 1654947 9182755 7003900 9460566 4842953 8797923 0977418 5149362 0450427
 8280281 6095453 6480436 6952465 7586575 2260767 2954052 4689547 3649663 1157544 5578827 4146014 8050075 9220488
 2603033 8445650 1666867 8800590 3821200 2470560 1200370 6973746 9382896 8948525 4715220 0316885 8306542 8055595
 8794407 6563708 5148276 4468052 7587937 7662096 9746199 3266810 3303292 3933758 9016213 9214310 0552325 6538250
 3369431 6796519 8909160 0488190 9751481 3769470 8756097 9980834 8135465 4570322 7955822 6912177 3906080 8178565
 8025021 2388274 2353951 6975906 0893393 4522039 4024770 6281531 1568959 9349912 2389975 7988493 6113457 8633393
 3450062 2470718 0324832 8920002 5778722 6794518 5493302 6704139 3787936 01334719262099 2000019 7591328 2395184
 1768525 7648501 7382085 3660967 0791581 3721114 9744732 8163976 7445303 3811739 6391342 2036804 2765561 8584835
 0332988 4395168 3310787 3565730 3493655 6742431 8526065 4746161 2091144 4480498 1652518 1231220 7632398 3905116
 2200722 5730340 6145597 3721323 5700953 6393143 8876184 8906278 9099408 4225417 1324100 8838434 9831855 9657980
 5932234 7584001 0744518 8820995 7787212 9207540 3364489 2821085 6897513 6231222 6736639 3221472 8585702 1605192
 3129914 1344011 5251805 1559069 5333269 5774141 4058037 5932963 8429370 1173255 6311724 9174553 8560888 5467906
 0289905 5838677 2396512 4265659 2901329 1905397 3970644 2179127 8127576 6356258 9459480 1388350 4694006 5293663
 7935877 0849240 9434382 5491651 6090098 9280141 8133049 6273081 8401985 1444028 1632947 6870384 0899509 3197768
 5436079 4600208 5154441 7554188 3942107 1714465 6445082 1474192 3113582 7002785 0627108 3047736 0698767 6092145
 3290980 2101603 5591791 2788071 4529477 7502612 9497556 6663609 0103424 6562830 2679226 7880476 6728918 5240422
 6951641 4390924 6528583 9391528 2913965 1730608 4532380 8805669 5662693 3205195 2418373 4871765 0835163 0197750
 6117117 7353418 4323993 9104973 1743055 5690449 2872347 3975402 3424982 2072003 3264059 4902285 0411490 2636824
 2973559 2370363 5491071 9337387 3031619 9562567 2905861 5275871 8732614 2785825 4082634 4265781 6197254 6309827
 6238820 3952094 3676617 1594163 1329068 0579545 7605866 3764867 2825120

numero di cifre del cateto 1: 5744

valore del CATETO 2

2718 43984567031203 3486970 4054845 2758187 7208124 9939009 3482131 1867150 9921792 6183668 2714108 7673843
8140677 5931704 6089631 7356594 4748667 5331231 3878491 3355641 8219036 8912237 0817720 5023383 1373447 3820376
9423609 6920536 4128598 0184732 0962218 8648566 7140086 8671272 6011403 8392587 7432296 5467660 5276730 6333774
7848972 0012606 1918850 6931879 7202354 2111679 0192267 1945469 9074678 0339486 8611516 1187134 3663685 6389868
3108001 8258010 9928684 2246200 3081211 9116260 0663121 5308857 4890897 1777561 8633812 4537898 9197698 1209931
0327833 6895739 9382690 5815307 1437156 3666486 4266138 9800810 5068462 4703839 8962225 5003872 5398998 8286831
2325522 2477297 7888045 8025596 4749810 7785381 7466971 0329518 9300927 2725548 5116472 2406683 1196236 6619595
9579917 9993137 7652444 3638554 1084595 3117902 9076566 6921279 8729726 3903658 1379017 4805721 1662368 5668413
5147070 3414387 6973520 2892705 3218782 3146188 7291880 0265120 2924673 7310938 5350485 7812682 5550134 1350678
5215387 5403878 7515952 0458924 8778429 8386185 4533831 1163445 0129301 5450237 8916680 5389054 5156200 9633968
5589180 6356475 6935163 9282307 4283666 0415808 2997307 3112147 3657112 5700570 9589923 0125092 3567661 4030758
4263464 5579804 1738394 5771181 3837330 0516940 2757437 3420199 7442981 2602477 7019991 2436346 4518413 6526382
3656975 2577240 9952447 0666305 9180935 8566035 5637278 1154647 4466795 1936868 9488425 4478803 7538772 8254298
3441035 2997238 5912847 3856976 6260545 0036609 9956262 6480417 9088371 9849486 1057179 8782556 1078991 8968039
6983951 3905896 8130759 6819377 8761537 5687878 2474228 9783835 4380182 7076792 7611467 9622267 9759984 9280922
8309874 8190167 9835671 5940312 2077733 7195669 6704459 0048264 9993688 7984485 2998918 7377546 5793042 3121955
1292077 8662246 6339964 7999517 1394221 6736465 3218824 3557738 0278629 3182459 7614059 8849328 3933056 1728703
0048574 6930750 5283792 9865338 9600664 1285122 5891920 9555165 2478076 4148888 4935710 7423250 9654083 1356489
0145543 2732876 2484490 9024728 2497985 7297900 9047582 6536240 3517783 5556688 7268667 0519814 9577755 2288140
7310595 6443036 4848237 0414962 0159811 7084071 6960658 1986574 5000536 7192901 3635812 6358910 7341026 9254450
2559044 1279384 8112828 2668524 8240901 6226633 2004374 9018827 3919922 6798673 4522124 2110496 0537596 4722071
0289376 2452945 0710738 1743367 1718227 1185209 6299957 8429524 2484395 0788233 8654350 0804729 6785525 6396860
5253879 1110165 7351570 1153148 2215196 9329425 5061709 6196752 3556435 3678429 7337014 5501931 9723879 0504359
4530782 1596417 4519658 4487137 9085704 6357245 8385831 6947210 3249438 1059521 4189701 2903914 6835578 6264050
1739117 3645715 2106811 3637250 4668284 9377535 7788914 4117561 7393895 8570887 0557964 8595340 2960359 1513573
4532182 0378454 9845743 7273744 9428688 2882880 8534711 1982953 5011807 9826105 7728692 2624748 2654143 4362279
7209760 1236305 9349769 7671864 3646790 8437858 3355177 3525932 2998342 7270650 4499279 9319916 5798010 0592781
3991189 5711085 4912029 9988882 2630914 1985376 2335687 0864264 5525548 9343658 8070723 8690069 9031913 9615215
4649364 7329587 3904409 7892025 2956622 8202345 2886492 3109766 6366689 0169555 7193523 7216463 3986689 7260472
3334872 3187239 9715913 6809458 7350125 5941857 8127310 7998836 8379768 3185675 4828245 3919474 7857921 7302172
8331825 1809577 2912455 9103358 7180072 1826536 2280666 7897860 6098507 2332966 6297697 5334167 8258636 4709001
4573956 7568563 9602487 3654127 6922685 1787607 6184519 5892587 6589923 5623433 0359450 0426095 8868978 3760551
2321090 4341072 4197398 4875793 0889727 1299803 9189292 8871188 4825487 6418417 9872511 5791414 5484392 6376829
0108380 9168009 6137099 4288059 5863506 5676121 6882270 0373950 0620146 0811864 6133964 1572860 2844392 7634504
0344637 4332916 7131112 9676564 4788181 3518411 7135525 6244292 3370307 3067235 7996312 8529718 8502533 8586091
7626300 5576346 7319921 8845610 1028762 8496680 8519246 3861052 9675237 6995697 8655961 2518857 0295796 5544743
6806463 1171239 5796379 0644963 2687251 95513973183485 2027603 5431763 0207659 8524988 9406765 0139568 1037082
0327523 1596572 8871201 4161631 1923070 2021842 8458732 4566097 1497741 3680867 1136969 4490150 7996255 6399936
5438062 0577481 9665562 0721973 9459294 2208046 2836770 9150176 7713040 4764419 1588604 1809118 5809716 4436479
1382042 9146159 2663573 7409050 0988759 1654947 9182755 7003900 9460566 4842953 8797923 0977418 5149362 0450427
8280281 6095453 6480436 6952465 7586575 2260767 2954052 4689547 3649663 1157544 5578827 4146014 8050075 9220488
2603033 8445650 1666867 8800590 3821200 2470560 1200370 6973746 9382896 8948525 4715220 0316885 8306542 8055595
8794407 6563708 5148276 4468052 7587937 7662096 9746199 3266810 3303292 3933758 9016213 9214310 0552325 6538250
3369431 6796519 8909160 0488190 9751481 3769470 8756097 9980834 8135465 4570322 7955822 6912177 3906080 8178565
8025021 2388274 2353951 6975906 0893393 4522039 4024770 6281531 1568959 9349912 2389975 7988493 6113457 8633393
3450062 2470718 0324832 8920002 5778722 6794518 5493302 6704139 3787936 01334719262099 2000019 7591328 2395184
1768525 7648501 7382085 3660967 0791581 3721114 9744732 8163976 7445303 3811739 6391342 2036804 2765561 8584835
0332988 4395168 3310787 3565730 3493655 6742431 8526065 4746161 2091144 4480498 1652518 1231220 7632398 3905116
2200722 5730340 6145597 3721323 5700953 6393143 8876184 8906278 9099408 4225417 1324100 8838434 9831855 9657980
5932234 7584001 0744518 8820995 7787212 9207540 3364489 2821085 6897513 6231222 6736639 3221472 8585702 1605192
3129014 1344011 5251805 1559069 5333269 5774141 4058037 5932963 8429370 1173255 6311724 9174553 8560888 5467906
0289905 5838677 2396512 4265659 2901329 1905397 3970644 2179127 8127576 6356258 9459480 1388350 4694006 5293663
7935877 0849240 9434382 5491651 6090098 9280141 8133049 6273081 8401985 1444028 1632947 6870384 0899509 3197768
5436079 4600208 5154441 7554188 3942107 1714465 6445082 1474192 3113582 7002785 0627108 3047736 0698767 6092145
3290980 2101603 5591791 2788071 4529477 7502612 9497556 6663609 0103424 6562830 2679226 7880476 6728918 5240422
6951641 4390924 6528583 9391528 2913965 1730608 4532380 8805669 5662693 3205195 2418373 4871765 0835163 0197750
6117117 7353418 4323993 9104973 1743055 5690449 2872347 3975402 3424982 2072003 3264059 4902285 0411490 2636824
2973559 2370363 5491071 9337387 3031619 9562567 2905861 5275871 8732614 2785825 4082634 4265781 6197254 6309827
6238820 3952094 3676617 1594163 1329068 0579545 7605866 3764867 2824791

numero di cifre del cateto 1: 5744

confrontando i valori dei due cateti si nota che l'unica differenza compare nelle ultime cifre.

Si ha infatti : $2825120 - 2824791 = 329$

valore dell'IPOTENUSA

3844 4544982 4237870 5413891 9297538 9790941 4956785 5443375 6556401 7330177 4128288 5033870 1777112 4284120
0949551 8125359 6192771 4451348 3081454 2673948 9315613 1859027 7240952 9308768 7324783 3326207 8292779 8596458
8522783 4391730 0275689 9771766 5134749 8391468 2402860 1921212 5142768 3750729 9819570 1557022 4657204 9552758
3768041 2629870 2661606 8445433 0532037 6981438 8731991 3884458 6172142 2031846 0258844 2804564 1938432 8789527
6580562 9643004 3800739 9919791 5585286 9828032 2843324 5031647 5095150 6876916 6273525 9516884 5514715 3526524
3690513 2583691 6621731 6142063 5644432 6497986 0831969 4663417 2063733 5657164 3243768 9583549 2972929 0609254
1522304 1906753 7758707 3023251 4911237 7054618 3519157 0041792 8705238 4037993 2850732 5916631 4990912 4842846
5557266 7765171 2016610 2322129 4355841 5499965 2838806 4020262 3985029 7232024 8723159 5692075 6215236 7813286
2893697 0893437 7224113 8992823 6547079 7868020 0845670 1619327 1253088 9686111 9763686 2671037 3312449 7287358
6030419 6897943 0964084 6538979 4027194 8283605 4478326 2307662 8803701 5985240 1218217 8021359 0837576 4769195
2708880 2273135 2316954 8647234 4792776 6104838 3790101 7305285 7142678 9429529 2001715 5183485 7629604 3738824
8825864 3267460 8673610 0394315 2627563 6428473 9663138 7318702 4618317 6247111 0543403 0579759 2369387 7474306
4160152 3198725 0649347 6957899 8557368 0099367 5771119 8750222 9451747 4333485 8482635 5755537 3983140 8002486
0386626 3150815 8822592 2932315 8603081 7219160 5845064 1391784 0870092 3418919 3805191 3855369 8158000 3346127
6532514 9865814 3809325 5113957 0353767 5822275 3238081 2543893 4355846 7105953 6188648 6900511 6102229 3247124
3564206 3409436 8832964 4989182 7996077 6236759 0835977 3716214 6712948 9105369 3220610 9539568 0635067 6609434
7201167 2095711 8156839 4471566 4142089 5930634 7711574 1738726 8455998 3326756 2079042 4166366 9987112 8211142
9268856 6207789 1513582 5888531 4687221 4012000 0258730 4688945 1701241 1755264 4620931 8423623 4866743 8735421
2361315 0926975 5039736 5278528 4228601 8666722 6591132 8695714 6978302 9349147 4553488 1219189 7681612 5197679
3092494 1076942 1162774 5292885 4571164 5391764 5240302 4153914 4507627 8097615 6789153 0759418 2156094 5211884
5049008 4204864 1159660 7314214 4739507 4037757 7923909 8109762 9448576 9659217 3772011 0163832 0892743 1451968
2235548 9968014 6771854 0852858 6744215 2129481 9643980 8633255 1354917 4197207 2897323 5863806 4988937 2725135
5840353 4057511 7642321 2454814 4642986 4026759 0758725 4631802 8868067 0671576 9186231 4893141 6048656 7844170
5022591 0283257 6699721 8886003 8758146 7350290 2421260 1777615 0457605 7074019 5321053 7735556 4437814 0535826
9268190 5845501 7151323 2740033 9916186 1298773 5619265 4679568 5789368 5465581 0641844 9385502 5539402 0333186
3018968 1731334 1859150 9065646 1265510 5444342 6816076 9593206 1896619 2650074 4156073 4725337 5776020 6306252
0983150 5314097 7229836 0833193 5787402 4053803 2711045 9409226 5794028 2213918 4907916 1339229 2107890 3666147
3931764 7045159 4974575 6941755 4298970 6008844 0591902 0730686 8703757 8995820 3680567 2681300 6116767 4303399
0022281 3538483 5434608 6558912 2793327 6485978 0620089 4277098 7166043 3959578 0847983 9515678 3533745 4505922
5688152 2085405 2319905 6022089 9827628 6224076 4496860 5562383 5395987 2230649 1664314 8362757 2857982 0594124
8565204 9836864 9608656 8558826 7305610 0034328 5744525 6603172 0572368 9650575 9578472 3465142 4843787 6517623
2768468 7046534 0460710 2525550 3617263 8530772 5349027 5687108 1985074 6258881 5178071 6398796 49399301
8669442 4815934 6971062 7648834 7009724 7454754 3129502 6818868 6724691 4624750 7649803 1177211 1230504 8923741
7601773 8936559 5614716 0597736 8889104 8353966 5952735 4561783 5419369 8469781 1657790 2931310 5693275 0820610
1743054 6164087 5810289 8612945 7093152 8601723 2710855 4936744 2468481 1910941 3651783 3501626 7366180 0874927
3099636 0627820 6393322 4454727 7604059 1994610 4603020 2663107 7926971 8614403 8620826 5273455 9606593 6758687
2095594 1190090 1737628 2374893 3423339 0767256 2125880 3605356 1767782 3131190 8261262 1865783 7476849 7092969
6992592 5025652 0342136 2097397 5157651 0347178 5383534 9482115 5008735 7642272 5956398 7701290 1297579 2071810
7922420 2464856 9668127 8614245 3983758 7400487 4701427 0936408 7987835 0591165 8824919 8332402 1370834 8026490
8133885 9837850 4358784 3687221 5555479 2663225 2244455 0299840 8648772 5493336 2274616 6039893 8548066 1434912
7152142 0361504 8102153 2795353 2444196 4347684 5434393 8862743 9524346 4630493 8726359 3846843 3197567 6515177
3888223 0790100 8125121 7166466 5805513 1944595 8638681 7444267 2891080 9141645 4432110 8733177 1526375 8246969
2237304 3821969 8548758 3664858 1214634 1727275 0728250 1941826 6706501 9419343 8086356 6306736 3058319 5367665
7441170 3775406 1377247 9801885 3883729 2401337 0391965 1271681 7489139 5087473 2465951 7778579 5574280 3423415
2904959 0566194 7691366 7592786 2640452 6462376 2676206 0232772 2650327 3748943 4841563 6340997 6666411 0803706
5821814 8554261 8543110 8181947 2493548 4871985 0917124 5265736 5579212 0406644 9507759 0731370 0680783 4729582
0893182 2058217 7900002 7910900 8106414 0633416 7863039 5081469 7778423 7747182 2602963 7858780 1557069 0779432
9058646 5836381 2787708 3574497 7672007 4519959 1106663 5257962 5116280 8465932 9721881 6688499 1240211 8842330
8477758 4495129 6506099 2160679 2368697 1567512 4955414 5525200 7989724 5427848 5349980 4372124 7446493 6528789
9810969 8400474 2488994 8313911 4421014 7045304 4037623 2039289 7764563 2866160 7472124 6861223 6008855 2941048
1112785 9145490 7813928 7203619 1163588 8457212 5966064 1932703 2344622 2712353 9726180 8837254 8354325 7363943
4625282 0984349 0648498 0075910 9207344 8047331 4743553 0761659 9840331 8567048 3900618 1061728 7820510 3929297
0235893 2726864 6860513 2383366 1449274 0190123 3355796 0895067 4788276 4053955 2177222 2288222 1093066 8110293
6069521 7231217 3785971 6606300 4097300 2003004 3366221 1022635 3969705 9397406 2211519 3456453 6870427 9805969
6685497 5087476 7488202 4859964 8356731 0982514 4705376 0452895 6946632 6297019 6275939 7436746 0369935 4230586
8256068 8482511 8862614 3487980 8138428 0669490 1774703 9971338 2382380 1809144 6899935 0101122 6439679 6088370
9285474 6068750 8537676 0710826 5071278 4493239 6598093 0342105 9899319 5164168 5042623 7150433 7794110 9927788
7425823 1356326 6930890 8836645 3961385 3500191 7734443 0737558 1388924 5919395 2787104 7748924 3762161 6911743
2221609 5947669 5743823 5005331 0500564 9175342 5197550 8370859 3075241

numero di cifre dell'ipotenusa: 5744

tempo di calcolo: 11.28 secondi

Il tempo di 11,28 secondi, è il tempo impiegato necessario per calcolare e trovare e mostrare sullo schermo del monitor sia i valori numerici dei due cateti sia quello dell'ipotenusa.

Riferimenti

- [Be] A.H. Beiler – Recreations in Theory of Numbers, Ch. XIV – Second Edition
Dover Publications, Inc., New York 1966
- [CR] R. Courant, H. Robbins – CHE COS'E' LA MATEMATICA , pagg. 87 ÷ 89,
Editore Boringhieri , Torino , 1964
- [Da] H. Davenport – Aritmetica superiore, Cap.VII - Zanichelli Editore , Bologna 1999
- [Dm] G. Di Maria – *Le Terne Pitagoriche particolari* <http://www.matematicamente.it/>
- [Fi] G. Finocchiaro – *Terne pitagoriche i cui cateti sono numeri consecutivi*
<http://www.matematicamente.it/>
- [Fr] G.Frattini – *Dell'analisi indeterminata di secondo grado* –Periodico di Matematica
per l'insegnamento secondario, anno VII – 1892 – Roma, Tipografia Elzeviriana
- [HW] G.H. Hardy, E.M. Wrigth –An introduction to the theory of numbers , Fifth edition, Ch.XIII,
-larendon Press , Oxford
- [Na] – T. Nagell, Introduction to NUMBER THEORY, Ch.VI – Chelsea Publishing
Company, New York 1984
- [Ro] – J. P. Robertson- *Solving the generalized Pell equation $x^2 - D \cdot y^2 = N$*
<http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf>
- [Sh] - D. Shanks – Solved and Unsolved Problem in Number Theory, Ch. III – Chelsea
Publishing Company, New York 1985

Siti web interessanti e relativi alle terne pitagoriche (Pythagorean triples):

<http://www.math.rutgers.edu/~erowland/pythagoreantriples.html>

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Pythag/pythag.html#mnformula>

<http://www.londongt.org/mathsk3and4/documents/pythagoreanTriples.pdf>

<http://www.m-a.org.uk/docs/library/2065.pdf>

ALLEGATO 1

```

REM ----- programma TERNEPI2.BAS -----
REM chiamato con N il valore numerico che individua la differenza fra
REM due cateti si procede al calcolo delle terne primitive prima per
REM N positivo(+N) e poi per N negativo(-N) secondo i seguenti passi:"
REM 1) Calcolo dei valori positivi pi- piccoli per x ed y che soddisfano
REM l'equazione  $x^2 - 2y^2 = N$  sia per N positivo che negativo."
REM 2) se l'equazione non ha soluzioni ci• significa che per quel valore
REM di N non esistono TERNE PRIMITIVE "
REM 3) viene poi controllato che (x+y) ed y non siano entrambi dispari
REM se (x+y) ed y sono entrambi dispari le TERNE NON sono primitive
REM 4) Si calcola anche l'MCD fra (x+y) ed y per sapere se le TERNE
REM sono PRIMITIVE o meno: se si trova che l'MCD ha valore 1 si pu•
REM dimostrare che le terne sono di tipo primitivo"
REM 5) attraverso le formule iterative riportate nell'articolo he comprende
REM questo programma come ALLEGATO 1 si calcolano con le formule di
REM Euclide i valori dell'ipotenusa e dei cateti relativi a tutte le
REM terne pitagoriche primitive che hanno valori dell'ipotenusa non
REM superiori a 10^15.

```

```

'DO: y$ = INKEY$: LOOP WHILE y$ = ""
CLS : DEFDBL A-Z
5 INPUT "Quale differenza N vuoi fra i due cateti"; N:
IF N > 1 * 10 ^ 13 THEN PRINT "INTRODUCI UN VALORE PIU' PICCOLO": GOTO 5
t1 = TIMER: z = 0
REM ----- inizio loop principale -----
REM ----- calcolo del campo di ricerca esaustiva -----
menon: NA = ABS(N): R = SQR(NA)
IF R = INT(R) AND N < 0 THEN x = R: y = R: GOTO CONT
IF R = INT(R) THEN x = 3 * R: y = 2 * R: GOTO CONT
L1 = SQR(NA / 2): L2 = SQR(NA)
IF N > 0 THEN L1 = 1: L2 = SQR(NA / 2)
IF N < 0 AND L1 <> INT(L1) THEN L1 = INT(L1 + 1)
NT = 0: 'PRINT NA, L1, L2
FOR y = L1 TO INT(L2)
    X2 = N + 2 * y * y
    x = SQR(X2)
    IF x = INT(x) GOTO CONT: 'THEN PRINT "N="; N, "X="; x, "Y="; y: GOTO CONT
NEXT y
IF z = 1 THEN PRINT : PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE": END
IF z = 0 THEN PRINT : PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE":
IF z = 0 GOTO ZETA1
CONT: 'PRINT " ESITONO TERNE: O.K."
p1 = y / 2: q1 = (x + y) / 2: ' PRINT "q1="; q1; "p1="; p1
IF q1 <> INT(q1) AND p1 <> INT(p1) THEN NT = 1
IF z = 0 AND NT = 1 THEN PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE":
IF z = 0 AND NT = 1 GOTO ZETA1
IF z = 1 AND NT = 1 THEN PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE": END
REM ----- calcolo dell'MCD fra x+y ed y -----
x1 = x + y: y1 = y
DO: re = x1 - INT(x1 / y1) * y1
    x1 = y1: y1 = re
LOOP UNTIL re = 0
'PRINT "MCD(x+y,y) ="; x1: ', y1; re; "; ""
REM ----- condizioni per terne primitive -----
IF x1 = 1 THEN PRINT "le terne relative a"; N; "sono primitive";
IF z = 0 AND x1 <> 1 THEN PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE"
IF z = 0 AND x1 <> 1 GOTO ZETA1
IF z = 1 AND x1 <> 1 THEN PRINT "per N="; N; "NON ci sono TERNE PRIMITIVE": END
terne: REM ----- inizio loop con formule iterative -----
IF NA > 1000 THEN PRINT
    PRINT "valori iniziali: x="; x; " y="; y
D = 2: k = 1: m = x + y:
a = m ^ 2 - y ^ 2: B = 2 * m * y: C = m ^ 2 + y ^ 2
PRINT : PRINT k, C; B; a
FOR k = 2 TO 30
    x0 = x
    x = x + D * y
    y = x0 + y
    m = x + y
    a = m ^ 2 - y ^ 2: B = 2 * m * y: C = m ^ 2 + y ^ 2
'IF z = 0 AND k <> INT(k / 2) * 2 THEN PRINT k; x; y, C; B; A
'IF z = 1 AND k = INT(k / 2) * 2 THEN PRINT k; x; y, C; B; A
IF a > 10 ^ 15 AND z = 0 THEN k1 = k: GOTO EXLO
IF a > 10 ^ 15 AND z = 1 THEN k2 = k: GOTO EXLO
'PRINT K; x; y, C; B; A
PRINT k, C; B; a
NEXT k
EXLO: PRINT "TERNA          IPOTENUSA          CATETO          CATETO "
IF z = 0 THEN PRINT "-----";
IF z = 0 THEN PRINT "-----"
IF z = 1 GOTO fine
ZETA1: z = 1: N = -N: GOTO menon
fine: IF NA > 20 THEN PRINT
PRINT "PRIME"; k1 + k2 - 2; "TERNE PRIMITIVE CON DIFFERENZA FRA I CATETI";
PRINT " PARI A"; ABS(N)
t2 = TIMER - t1: PRINT "tempo di calcolo:"; t2; "secondi"
END

```

ALLEGATO 2

```

REM programma per il calcolo delle TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE di valore
REM anche elevato che hanno cateti che differiscono fra loro di un valore N
REM considerando le formule di Euclide posso porre:  $m^2 - n^2 = 2 * m * n +-N$ 
REM da questa si trae  $(m-n)^2 - 2 * n^2 = +-N$  da cui
REM posto  $x = m-n$ ,  $y = n$  si ha l'equazione di Pell  $x^2 - 2*y^2 = +-N$ ,
REM trovate se esistono le soluzioni minime x1 e y1 dell'equazione,
REM per ricavare le altre soluzioni si considerano le formule ricorrenti
REM riportate nell'articolo;
REM utilizzando quindi le formule di Euclide per il calcolo dei cateti e della
REM ipotenuza tramite il presente algoritmo con una aritmetica a precisione
REM multipla si possono calcolare e trovare i valori numerici composti anche da
REM migliaia di cifre dei cateti e della ipotenuza della terna primitiva
REM desiderata.
REM -----
CLS : DEFDBL A-Z
DIM X(3000), x0(3000), Y(3000), m(4000), mm(4000), mi(4000)
DIM s(4000), b(4000), d(4000), c(4000)
INPUT "quale terna n-esima vuoi visualizzare"; nt
CLS : PRINT "quale terna n -esima vuoi visualizzare?"; nt; "-esima"
PRINT
INPUT "quale differenza N vuoi fra i cateti "; N
c1 = TIMER
g = 7: pg = 10 ^ 7: z = 0
IF N = 1 THEN X(0) = 1: Y(0) = 1: GOTO UNO
menon: na = ABS(N): r = SQR(na)
IF r = INT(r) AND N < 0 THEN X = r: Y = r: GOTO CONT
IF r = INT(r) THEN X = 3 * r: Y = 2 * r: GOTO CONT
L1 = SQR(na / 2): L2 = SQR(na)
IF N > 0 THEN L1 = 1: L2 = SQR(na / 2)
IF N < 0 AND L1 <> INT(L1) THEN L1 = INT(L1 + 1)
'PRINT NA, L1, L2
FOR Y = L1 TO INT(L2): ' PRINT Y;
    x2 = N + 2 * Y * Y
    X = SQR(x2)
    'IF x = INT(x) THEN PRINT "N="; N, "X="; x, "Y="; y: GOTO CONT:
    IF X = INT(X) GOTO CONT
NEXT Y

PRINT "*** NON CI SONO TERNE PRIMITIVE": GOTO TEMPO
CONT: ' PRINT " ESITONO TERNE: O.K."
p1 = Y / 2: q1 = (X + Y) / 2: ' PRINT "q1="; q1; "p1="; p1
IF q1 <> INT(q1) AND p1 <> INT(p1) THEN PRINT " le terne NON sono primitive": End
REM ----- calcolo dell'MCD fra X+Y ed Y -----
x1 = X + Y: y1 = Y
DO: re = x1 - INT(x1 / y1) * y1: ' PRINT X1, Y1, re
    x1 = y1: y1 = re
LOOP UNTIL re = 0
'PRINT "MCD(x,y) = "; x1: ' , y1; re"
PRINT
IF x1 = 1 AND z = 0 THEN PRINT " per N="; N; "si hanno terne primitive": t1 = 1
IF x1 <> 1 AND z = 0 THEN PRINT " le terne NON sono primitive": t1 = 2:
IF x1 = 1 AND z = 1 THEN PRINT " per N="; N; "si hanno terne primitive": t2 = 1
IF x1 <> 1 AND z = 1 THEN PRINT " le terne NON sono primitive": t2 = 2:
IF t1 = 2 AND t2 = 2 THEN END
terne: d = 2
IF z = 0 THEN PRINT "valori iniziali per N="; N; ": x = "; X, " y = "; Y
IF z = 0 THEN xx1 = X: yy1 = Y: 'PRINT " xx1"; xx1; yy1
IF z = 0 THEN A1 = (xx1 + yy1) ^ 2 + yy1 ^ 2: ' PRINT " A1="; A1
IF z = 1 THEN PRINT "valori iniziali per N = "; N; ": x = "; X, " y = "; Y
IF z = 1 THEN xx2 = X: yy2 = Y: 'PRINT " xx2?"; xx2; yy2
IF z = 1 THEN A2 = (xx2 + yy2) ^ 2 + yy2 ^ 2: 'PRINT " A2="; A2

IF t1 = 1 AND t2 = 2 THEN X(0) = xx1: Y(0) = yy1: tt = 1: GOTO UNO
IF t1 = 2 AND t2 = 1 THEN X(0) = xx2: Y(0) = yy2: tt = 1: GOTO UNO
n2 = INT(nt / 2)
IF z = 1 GOTO fine

```

```

z = 1: N = -N: GOTO menon
fine: 'PRINT A1, A2
IF nt = n2 * 2 AND A1 < A2 THEN X(0) = xx2: Y(0) = yy2: NF = nt / 2
IF nt <> n2 * 2 AND A1 < A2 THEN X(0) = xx1: Y(0) = yy1: NF = n2 + 1
IF nt = n2 * 2 AND A1 > A2 THEN X(0) = xx1: Y(0) = yy1: NF = nt / 2:
IF nt <> n2 * 2 AND A1 > A2 THEN X(0) = xx2: Y(0) = yy2: NF = n2 + 1
'PRINT "x(0)="; x(0), "y(0)="; y(0), "nf="; NF
UNO: gx = 0: gy = 0
NN = 0
111 : NN = NN + 1: 'PRINT : PRINT n
      'DO: y$ = INKEY$: LOOP WHILE y$ = ""
      REM ----- x0 <-- x -----
      ERASE x0
      FOR j = 0 TO gx: x0(j) = X(j): NEXT j
      REM ----- calcolo di D * y(k) = 2 * y(k) = s(k) -----
      ERASE s
      FOR k = 0 TO gy: r = 0
      X = s(k) + Y(k) * 2 + r: r = INT(X / pg): s(k) = X - r * pg: s(k + 1) = r
      NEXT k
      IF r > 0 THEN gy = gy + 1: s(gy) = r
'PRINT "2 * y      ="; : FOR i = gy TO 0 STEP -1: PRINT s(i); : NEXT i

      REM ----- CALCOLO DI x + 2 * y -----
      REM ----- algoritmo di addizione x(k) = x(k) + s(h) -----
      r = 0: IF gx < gy THEN gx = gy
      FOR k = 0 TO gx
      X(k) = X(k) + s(k) + r: r = 0
      IF X(k) >= pg THEN r = INT(X(k) / pg): X(k) = X(k) - r * pg
      NEXT k
      IF r > 0 THEN gx = gx + 1: X(gx) = r

'PRINT "x = x+ d * y ="; : FOR i = gx TO 0 STEP -1: PRINT x(i); : NEXT i

      REM ----- algoritmo di addizione y(k) = x0(k) + y(h) -----
      r = 0: 'IF gx < gy THEN gx = gy
      FOR k = 0 TO gy
      Y(k) = x0(k) + Y(k) + r: r = 0
      IF Y(k) >= pg THEN r = INT(Y(k) / pg): Y(k) = Y(k) - r * pg
      NEXT k
      IF r > 0 THEN gy = gy + 1: Y(gy) = r

IF NN = nt - 1 AND tt = 1 GOTO 121
IF NN = NF - 1 AND N <> 1 GOTO 121
IF NN = nt - 1 AND N = 1 GOTO 121
GOTO 111

REM ***** fine loop *****
REM ++++++ calcolo dei valori relativi alla terna richiesta ++++++

121 PRINT :
'PRINT "x = "; : FOR i = gx TO 0 STEP -1: PRINT x(i); : NEXT i
'PRINT : PRINT
'PRINT "y = "; : FOR i = gy TO 0 STEP -1: PRINT y(i); : NEXT i
'PRINT
REM ----- algoritmo di addizione m(k) = x(k) + y(h) -----
g1 = gx
IF gx < gy THEN gx = gy
r = 0:
FOR k = 0 TO gx:
      m(k) = X(k) + Y(k) + r: r = 0
      IF m(k) >= pg THEN r = INT(m(k) / pg): m(k) = m(k) - r * pg
NEXT k
IF r > 0 THEN gx = gx + 1: m(gx) = r
'PRINT "x+y ="; : FOR k = gx TO 0 STEP -1: PRINT m(k); : NEXT k

REM ----- calcolo di m(k)* m(k)= (x+y)^2 -----
ERASE s
wm = gx + gx + 1:
FOR k = 0 TO gx: r = 0
      FOR h = 0 TO gx
      X = s(h + k) + m(h) * m(k) + r: r = INT(X / pg): s(h + k) = X - r * pg
      NEXT h
      s(h + k) = r: ' PRINT " h+k="; h + k; "h="; h, "k="; k
NEXT k

```

```

IF s(wm) = 0 THEN wm = wm - 1
'PRINT "m(k)^2= (x+y)^2=";
FOR I = wm TO 0 STEP -1: mm(I) = s(I): NEXT I
'FOR i = wm TO 0 STEP -1: PRINT mm(i); : : NEXT i
PRINT

REM ----- calcolo di 2*m(k) = s(k) -----
ERASE s
FOR k = 0 TO gx: r = 0
X = s(k) + m(k) * 2 + r: r = INT(X / pg): s(k) = X - r * pg: s(k + 1) = r
NEXT k
IF r > 0 THEN gx = gx + 1: s(gx) = r
'PRINT : PRINT "2 * m      ="; : FOR i = gx TO 0 STEP -1: PRINT s(i); : NEXT i

REM ----- calcolo di 2*m(i)*y(k) = s(i)*y(k) -----
w = gx + gy + 1:
FOR k = 0 TO gy: r = 0
FOR h = 0 TO gx
X = b(h + k) + s(h) * Y(k) + r: r = INT(X / pg): b(h + k) = X - r * pg
NEXT h
b(h + k) = r: 'PRINT "          h+k="; h + k; "h="; h, "k="; k
NEXT k
IF b(w) = 0 THEN w = w - 1

'PRINT : PRINT " 2mn="; : FOR i = w TO 0 STEP -1: PRINT b(i); : NEXT i
wc = w
FOR I = w TO 0 STEP -1: c(I) = b(I): NEXT I

REM ----- calcolo di y(k)*y(k) -----
ERASE s
w1 = gy + gy + 1:
FOR k = 0 TO gy: r = 0
FOR h = 0 TO gy
X = s(h + k) + Y(h) * Y(k) + r: r = INT(X / pg): s(h + k) = X - r * pg
NEXT h
s(h + k) = r:
NEXT k
IF s(w1) = 0 THEN w1 = w1 - 1
'PRINT : PRINT "y^2="; : FOR i = w1 TO 0 STEP -1: PRINT s(i); : NEXT i

REM ----- ipotenusa: mm(k)+ s(h) = calcolo di m(k)^2 + y(h)^2 -----
r = 0:
FOR k = 0 TO wm
mi(k) = mm(k) + s(k) + r: r = 0
IF mi(k) >= pg THEN r = INT(mi(k) / pg): mi(k) = mi(k) - r * pg
NEXT k
IF r > 0 THEN wm = wm + 1: mi(wm) = r
PRINT
'PRINT "ipotenusa="; : FOR i = wm TO 0 STEP -1: PRINT mi(i); : NEXT i

REM ----- algoritmo di sottrazione: d(k) = m^2 - y^2 -----
'PRINT
'PRINT "m(k)^2= (x+y)^2="; : FOR i = wm TO 0 STEP -1: PRINT mm(i); : : NEXT i
'PRINT
'PRINT "y^2="; : FOR i = w1 TO 0 STEP -1: PRINT s(i); : NEXT i

r = 0: ww = wm
FOR k = 0 TO ww
d(k) = mm(k) - s(k) - r: r = 0
IF d(k) < 0 THEN d(k) = pg + d(k): r = 1
'IF d(k) = 0 THEN w = w - 1
NEXT k
IF d(ww) = 0 THEN ww = ww - 1
FOR k = wm TO 0 STEP -1: IF d(k) > 0 THEN k1 = k: k = 0
NEXT k
'PRINT : FOR j = wm TO 0 STEP -1: PRINT d(j); : NEXT j

REM----- RISULTATI -----
'DO: y$ = INKEY$: LOOP WHILE y$ = ""
'PRINT : PRINT "cateto 1 :"; : FOR I = wc TO 0 STEP -1: PRINT b(I); : NEXT I

```

```

PRINT "                                     valore del CATETO 1"
f$ = "": ab$ = STR$(b(wc)): L1 = LEN(ab$): w$ = " ": ' PRINT l1
PRINT " "; SPC(g + 1 - L1); ab$; SPC(1);
FOR k = wc - 1 TO 0 STEP -1
Y$ = "": c$ = STR$(b(k)): la = LEN(c$) - 1: r$ = RIGHT$(c$, la)
s = g - la: IF s = 0 THEN b$ = Y$ + r$: GOTO 190
z$ = "0": Y$ = STRING$(s, z$): b$ = Y$ + r$
190 : PRINT b$; SPC(1);
NEXT k
FOR k = 1 TO 7: IF b(wc) < 10 ^ k THEN k1 = k: k = 7
NEXT k
ci1 = k1 + (wc * 7): PRINT : PRINT "numero di cifre del cateto 1:"; ci1

'PRINT : PRINT "cateto 2 :"; : FOR j = ww TO 0 STEP -1: PRINT d(j); : NEXT j
PRINT : PRINT : PRINT "                                     valore del CATETO 2"
f$ = "": ab$ = STR$(d(ww)): L1 = LEN(ab$): w$ = " ": ' PRINT l1
PRINT " "; SPC(g + 1 - L1); ab$; SPC(1);
FOR k = ww - 1 TO 0 STEP -1
Y$ = "": c$ = STR$(d(k)): la = LEN(c$) - 1: r$ = RIGHT$(c$, la)
s = g - la: IF s = 0 THEN b$ = Y$ + r$: GOTO 290
z$ = "0": Y$ = STRING$(s, z$): b$ = Y$ + r$
290 : PRINT b$; SPC(1);
NEXT k
FOR k = 1 TO 7: IF d(ww) < 10 ^ k THEN k1 = k: k = 7
NEXT k
ci2 = k1 + (ww * 7): PRINT : PRINT "numero di cifre del cateto 2:"; ci2

'PRINT "Ipotenusa="; : FOR k = wm TO 0 STEP -1: PRINT mi(k); : NEXT k
PRINT : PRINT
PRINT "                                     valore dell'IPOTENUSA "
k1 = wm: u = 0
f$ = "": ab$ = STR$(mi(wm)): L1 = LEN(ab$): w$ = " ": ' PRINT l1
PRINT " "; SPC(g + 1 - L1); ab$; SPC(1);
FOR k = wm - 1 TO 0 STEP -1
Y$ = "": c$ = STR$(mi(k)): la = LEN(c$) - 1: r$ = RIGHT$(c$, la)
s = g - la: IF s = 0 THEN b$ = Y$ + r$: GOTO 390
z$ = "0": Y$ = STRING$(s, z$): b$ = Y$ + r$
390 : PRINT b$; SPC(1);
NEXT k
FOR k = 1 TO 7: IF mi(wm) < 10 ^ k THEN k1 = k: k = 7
NEXT k
'PRINT " numero cifre di prima cella: "; k1
cip = k1 + (wm * 7): PRINT : PRINT "numero di cifre dell'ipotenusa:"; cip
TEMPO: c2 = TIMER - c1: PRINT : PRINT "tempo di calcolo :"; c2; "secondi"

```