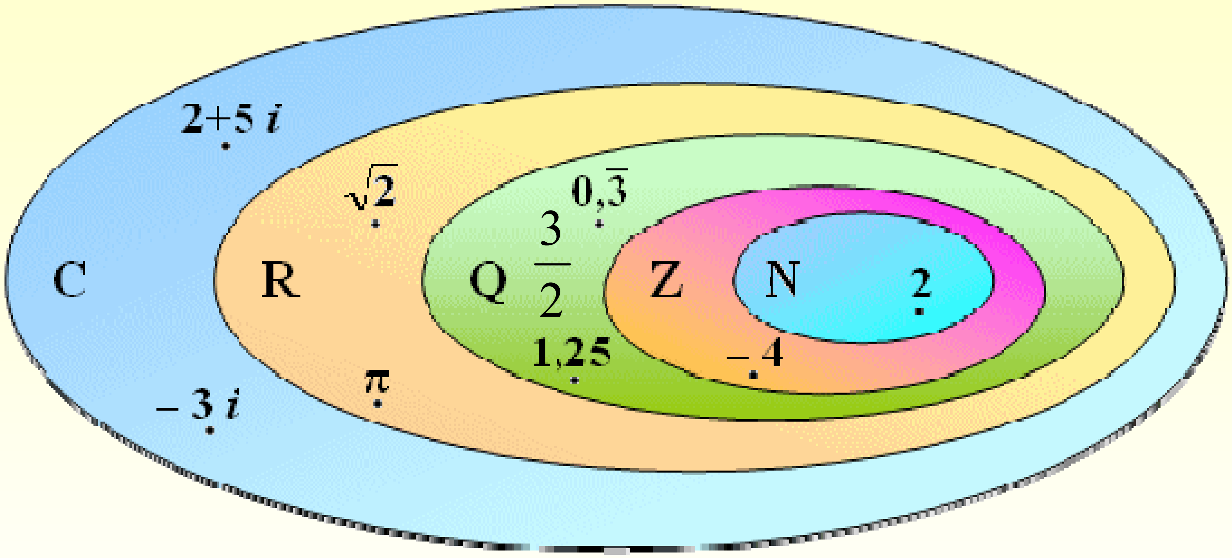
GLI INSIEMI NUMERICI
N - Z - Q - R - C



Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Ampliamento degli insiemi numerici

Chiusura rispetto alle operazioni

L'insieme N = {0; 1; 2; 3; 4; …} dei numeri naturali **è chiuso** rispetto all'**addizione** e alla **moltiplicazione** (la somma o il prodotto di due elementi di N è ancora un elemento di N), ma non è chiuso rispetto alla sottrazione e alla divisione.

Per poter eseguire sempre le sottrazioni occorre introdurre un nuovo insieme numerico: l'insieme Z dei numeri interi relativi, di cui N si può considerare un sottoinsieme.

L'insieme Z = {…-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;…} dei numeri interi relativi **è chiuso** rispetto all'**addizione**, alla **sottrazione** e alla **moltiplicazione**, ma non è chiuso rispetto alla divisione.

Per poter eseguire sempre le divisioni (con divisore non nullo) occorre introdurre un nuovo insieme numerico: l'insieme **Q** dei numeri razionali.

L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione per un numero ≠ 0 si possono sempre eseguire in Q, diremo perciò che **Q,** è **chiuso** rispetto alle **operazioni aritmetiche**

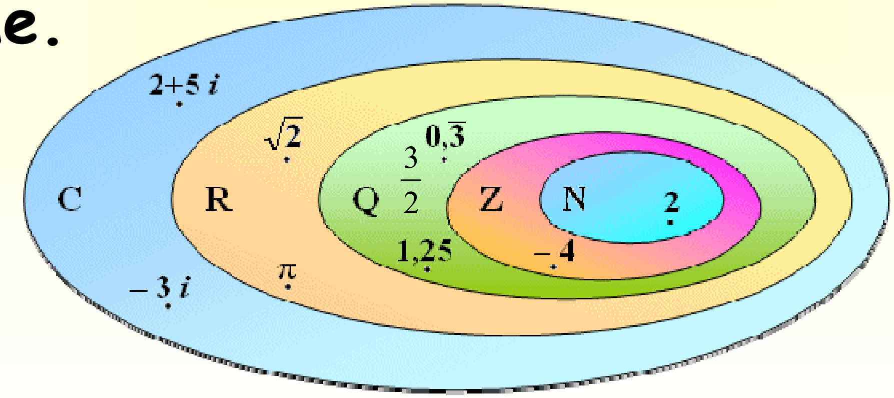
Se consideriamo l'operazione di *estrazione di radice quadrata*, non sempre è definita in Q. Per es. non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2.

Per poter risolvere quindi gli svariati problemi che non ammettono soluzioni in Q, nasce l'esigenza di ampliare l'insieme Q con i **numeri irrazionali,** ossia quei numeri che non possono essere espressi mediante frazioni.

Nasce così l'insieme dei **Numeri Reali**, costituito da tutti i numeri razionali e da tutti i numeri irrazionali.

Anche nell'insieme R vi sono alcune operazioni che non si possono eseguire, come ad es. *l'estrazione di radice quadrata di un numero reale negativo*: per risolvere questo problema è stato introdotto l'insieme **C dei numeri complessi**, di cui R può essere considerato un sottoinsieme.

Gli insiemi Q, R e **C** sono **chiusi** rispetto alle **operazioni aritmetiche.**



Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Proprietà delle operazioni

In **tutti** gli insiemi numerici l'addizione e la moltiplicazione godono della **proprietà commutativa** e **associativa** e vale la proprietà **distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**.

Proprietà commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Proprietà associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Elementi neutri

In **tutti** gli insiemi numerici esiste **l'elemento neutro** dell'addizione (lo zero) e l'elemento neutro della moltiplicazione (l'unità)

Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Elementi inversi

In N non esistono gli elementi inversi né rispetto all'addizione né rispetto alla moltiplicazione.
In Z esistono gli elementi inversi rispetto all'addizione (l'opposto) ma non gli elementi inversi rispetto alla moltiplicazione (reciproco)

Struttura d'ordine

L'insieme **C** dei numeri complessi **non è ordinato.**

Gli **altri insiemi** numerici sono invece dotati di una struttura d'**ordine totale.** Ciò significa che due elementi distinti di uno di questi insiemi sono sempre *confrontabili*, ossia uno di essi precede l'altro nell'ordinamento.

Densità

N e **Z** sono **discreti** (tra un numero e il suo successivo non esistono altri numeri).

Nell'insieme Q e nell'insieme R invece tra due numeri distinti esistono infiniti numeri, ciò si esprime dicendo che **Q** ed **R** sono **densi**.

Completezza

L'insieme **R** è **completo** (i numeri reali si possono porre in corrispondenza biunivoca con i punti della retta).

N, **Z** e **Q** sono **incompleti** (vi sono infiniti punti della retta orientata che non sono associati ad alcun numero di N , Z o Q).

L'infinito

Un insieme **è infinito** se e solo se si può porre in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Insiemi equipotenti

Due insiemi sono **equipotenti** se si possono porre in **corrispondenza biunivoca**. Insiemi equipotenti hanno la stessa cardinalità. La cardinalità di un insieme finito si identifica con il numero dei suoi elementi.

Un insieme che si possa porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme N si dice **numerabile**.

Gli insiemi **Z** e **Q sono numerabili. R non è numerabile:** ha la **potenza del continuo.**

L'insieme **R** è **completo** (i numeri reali si possono porre in **corrispondenza biunivoca** con i punti di una retta orientata).

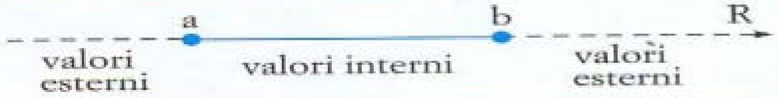
In base a questa corrispondenza è possibile parlare indifferentemente di **insieme numerico** o di **insieme di punti** sulla retta.

Tra gli insiemi numerici sono fondamentali gli **intervalli**.

Tabella

INTERVALLI LIMITATI

Intervallo chiuso di estremi a e $b (a < b)$:
$[a\ ;\ b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$



Intervallo aperto di estremi a e $b (a < b)$:
$(a\ ;\ b) = \{x \in R | a < x < b\}$

Intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi a e $b (a < b)$:
$(a\ ;\ b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$

Intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra di estremi a e $b (a < b)$:
$[a\ ;\ b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$

L'*ampiezza* dell'intervallo limitato di estremi a e b (con $a < b$) misura, in ogni caso, $b - a$.

INTERVALLI ILLIMITATI

Intervallo chiuso illimitato superiormente di estremo a:
$[a\ ;\ +\infty) = \{x \in R | x \geq a\}$

Intervallo aperto illimitato superiormente di estremo a:
$(a\ ;\ +\infty) = \{x \in R | x > a\}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente di estremo a:
$(-\infty\ ;\ a] = \{x \in R | x \leq a\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente di estremo a:
$(-\infty\ ;\ a) = \{x \in R | x < a\}$

In particolare si ha $R = (-\infty\ ;\ +\infty)$.