DISEQUAZIONI FRAZIONARIE
e
SISTEMI

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Definizione

Una **disequazione** è **frazionaria** se l'incognita compare al denominatore di almeno una frazione.

Qualunque sia il tipo di disequazione frazionaria essa è sempre riconducibile al **RAPPORTO tra DUE POLINOMI** del tipo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} < 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$$

Per risolvere questo tipo di disequazione è sufficiente **STUDIARE il SEGNO DEL NUMERATORE** e il **SEGNO DEL DENOMINATORE** e, quindi, il **SEGNO DELLA FRAZIONE**.

Risoluzione delle disequazioni frazionarie

Si riduce a forma canonica la disequazione frazionaria e si scrivono le **C**ondizioni di **A**ccettabilità delle soluzioni

Si studia separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Per farlo, a *prescindere dal simbolo di disequazione*, si studia il segno del numeratore risolvendo la disequazione $N(x) > 0$ o $N(x) \geq 0$ e il segno del denominatore risolvendo la disequazione $D(x) > 0$.

Si rappresenta, mediante uno schema grafico, il segno del numeratore e il segno del denominatore, indicando con una linea continua gli intervalli in cui sono positivi e con una linea tratteggiata gli intervalli in cui sono negativi.

Applicando la regola dei segni, da questo schema si deduce il segno della frazione e, tenendo presente il simbolo di disuguaglianza che compare nella disequazione, si può determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione.

Esempi

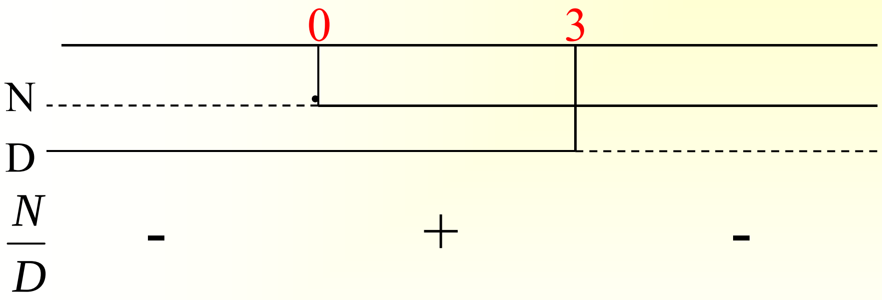
1. $$\frac{2x}{3-x} \leq 0$$

1. La disequazione si presenta già in forma canonica. Il denominatore si annulla se è 3 – x = 0 → x = 3. Quindi tale valore, in corrispondenza del quale la frazione non esiste, deve essere escluso dall'insieme delle soluzioni. La condizione di accettabilità è: C.A.: $x \neq 3$

2. Studiamo il segno del numeratore: $\mathbf{N \geq 0} \rightarrow 2x \geq 0 \rightarrow \mathbf{x \geq 0}$

3. Studiamo il segno del denominatore: $\mathbf{D > 0} \rightarrow 3\text{-}x > 0 \rightarrow \mathbf{x < 3}$

4. Rappresentiamo in uno schema grafico le variazioni del segno di N e di D al variare di x nell'insieme R, indicando con una linea continua gli intervalli in cui sono positivi e con una linea tratteggiata gli intervalli in cui sono negativi.



Determiniamo il segno della frazione applicando la regola dei segni.

Vediamo che la disequazione $\frac{2x}{3-x} \leq 0$

è verificata per $\mathbf{x \leq 0 \;\vee\; x > 3}$

L'insieme delle soluzioni è quindi: S = $(-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$

Esempi

2. $\boxed{\dfrac{1}{x-1} < 3}$

1. La disequazione non è in forma canonica. Trasportiamo al primo membro il termine che compare al secondo e riduciamo tutto allo stesso denominatore e semplifichiamo.

$$\frac{1}{x-1} - 3 < 0$$

$$\frac{1-3(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\frac{1-3x+3}{x-1} < 0$$

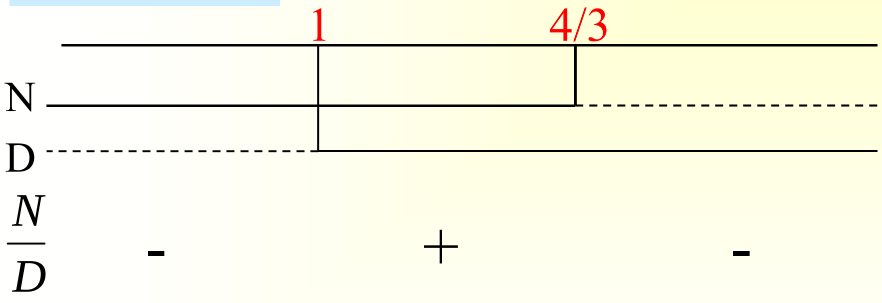
$$\boxed{\frac{-3x+4}{x-1} < 0}$$

➢Le condizioni di accettabilità sono: C.A.: $x \neq 1$

➢Studiamo il segno del numeratore: **N > 0** → $-3x+4>0$ → **$x<4/3$**

➢Studiamo il segno del denominatore: **D > 0** → $x-1 > 0$ → **$x > 1$**

➢Rappresentiamo in uno schema grafico le variazioni del segno di N e di D al variare di x nell'insieme R, indicando con una linea continua gli intervalli in cui sono positivi e con una linea tratteggiata gli intervalli in cui sono negativi.



Determiniamo il segno della frazione applicando la regola dei segni.

Vediamo che la disequazione $\boxed{\dfrac{1}{x-1} < 3}$

è verificata per **$x < 1$ ∨ $x > 4/3$**

L'insieme delle soluzioni è quindi: $S = (-\infty; 1) \cup (4/3; +\infty)$

Esempi

3. $$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-5x+2}>0$$

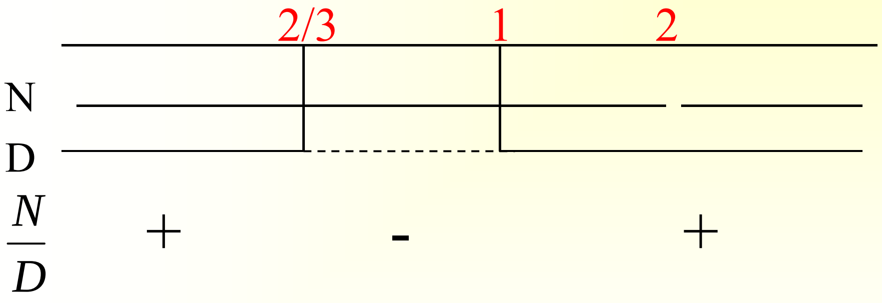
1. La disequazione si presenta già in forma canonica. Il denominatore si annulla se è: $3x^2 -5x+2 =0 \rightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 2/3$ valori, in corrispondenza dei quali la frazione non esiste.

La condizione di accettabilità è: C.A.: $x \neq 2/3 \;\wedge\; x \neq 1$

2. Studiamo il segno del numeratore: $\mathbf{N > 0} \rightarrow x^2 -4x+4 > 0 \rightarrow$ $\forall x \neq 2$

3. Studiamo il segno del denominatore: $\mathbf{D > 0} \rightarrow$ $3x^2 -5x+2 >0 \rightarrow$ $x < 2/3 \vee x >1$

4. Rappresentiamo in uno schema grafico le variazioni del segno di N e di D al variare di x nell'insieme R, indicando con una linea continua gli intervalli in cui sono positivi e con una linea tratteggiata gli intervalli in cui sono negativi.



Determiniamo il segno della frazione applicando la regola dei segni.

Vediamo che la disequazione data

è verificata per $\mathbf{x < 2/3 \;\vee\; x > 1 \wedge x \neq 2}$

Sistema di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nella stessa incognita.

Risolvere un sistema di disequazioni significa determinare le soluzioni comuni a tutte le disequazioni del sistema.

L'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle varie disequazioni che compongono il sistema.

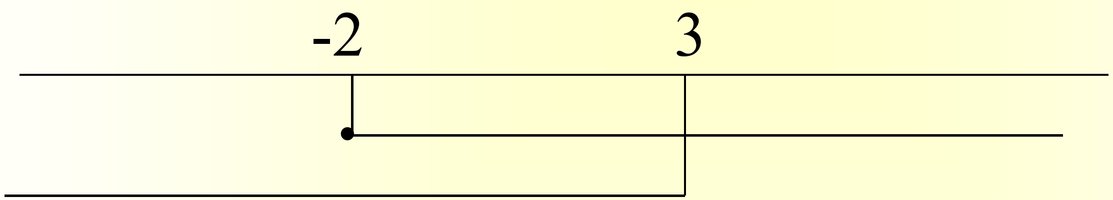
Esempio

1. $\begin{cases} 2x+14 \geq 12+x \\ 3x-2<7 \end{cases}$ Sposto i termini con x prima dell'uguale, quelli noti dopo l'uguale cambiando di segno

$$\begin{cases} 2x-x \geq 12-14 \\ 3x<7+2 \end{cases}$$

Riducendo i termini simili ho: $\begin{cases} x \geq -2 \\ 3x<9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x<3 \end{cases}$$



La soluzione è: $-2 \leq x < 3$

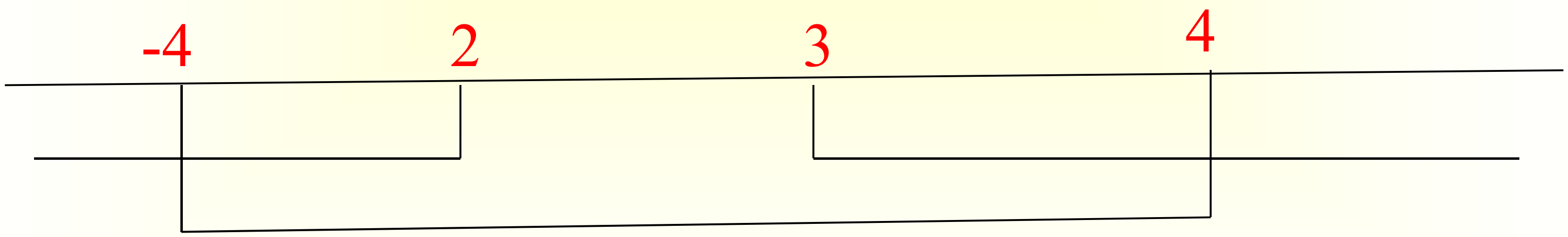
Esempio

2. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$

la prima disequazione $x^2 - 5x + 6 > 0$ e' verificata per $x < 2 \cup x > 3$
la seconda $x^2 - 16 < 0$ e' verificata per $-4 < x < 4$
quindi il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x < 2 \cup x > 3 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

Si riportano i valori su un grafico e si prendono quelli che risolvono contemporaneamente entrambe le disequazioni



La soluzione del sistema è: $-4 < x < 2 \cup 3 < x < 4$