Le Funzioni

Modulo
Esponenziali
Logaritmiche

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Definizione di modulo o valore assoluto

Se x è un generico numero reale, il suo **modulo** o **valore assoluto** è:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio

$|+3| = +3 = 3$

$|-3| = -(-3) = +3 = 3$

$|0| = 0$

cioè il modulo di un numero reale lascia invariato il numero se questo è positivo e gli cambia segno se il numero è negativo

Nella scrittura $|x|$, **x** è chiamato **argomento** de modulo.

La definizione di modulo di un numero reale si estende al caso in cui l'argomento sia una generica espressione letterale.

Consideriamo $|f(x)|$, dove f(x) è un'espressione nella variabile x, si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo l'espressione $|x-3|$. Applicando la definizione di modulo avremo

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \Longrightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ 3-x & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

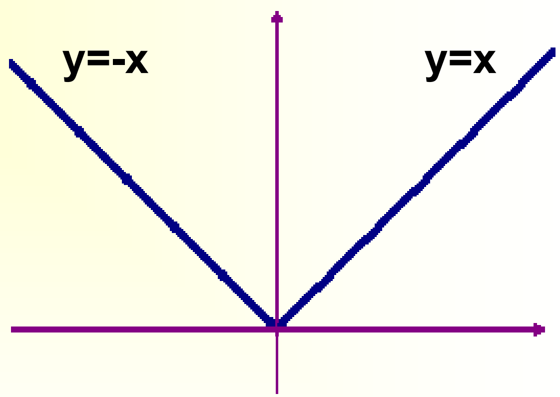
Grafico della funzione modulo

Consideriamo ora la funzione modulo, **$f(x) = |x|$**, cioè la funzione che a ogni x associa il modulo di x.

Il **Dominio** è tutto l'asse reale, dom f = R; usando le notazioni per gli intervalli possiamo scrivere **D= $(-\infty;\ +\infty)$** (infatti possiamo fare il modulo di ogni numero reale).

Il **Codominio**, per la definizione il modulo, è R^+ , Im f = $\{x \in R : x \geq 0\}$, che usando le notazioni per gli intervalli possiamo scrivere
Im f = $[0,\ +\infty)$.

Per quanto riguarda il **Grafico**, basta ricordare la definizione di modulo. Per le x positive, $f(x) = x$, quindi se guardiamo solo il semipiano delle x positive il grafico sarà dato dalla retta $y = x$ (cioè solo la bisettrice del primo quadrante). Mentre nel semipiano delle x negative il grafico sarà dato dal ramo di retta di equazione $y = -x$ che sta nel secondo quadrante .

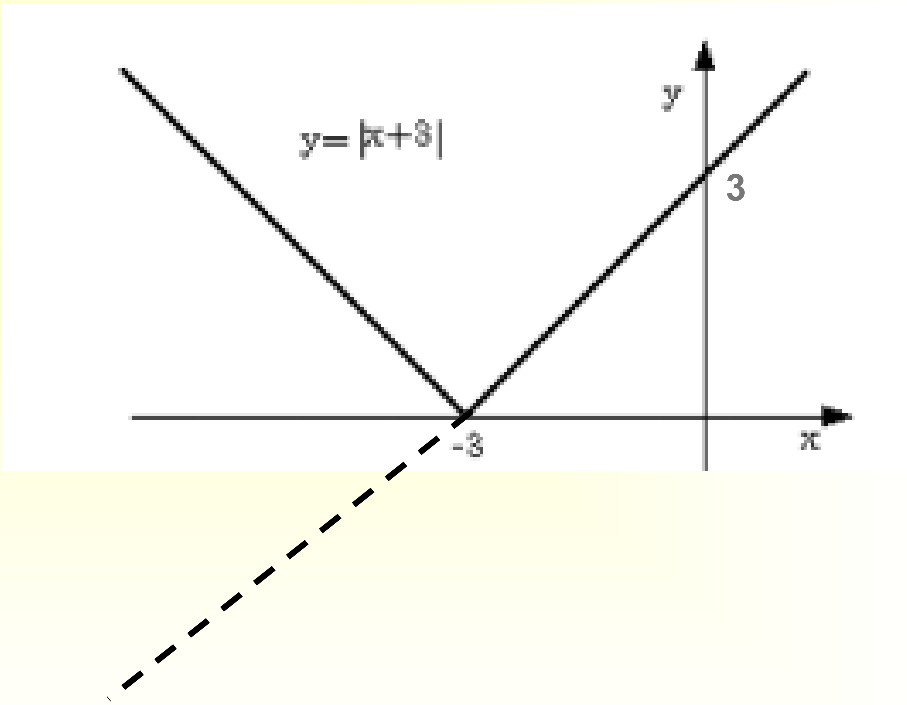


Disegniamo il grafico di $f(x) = |x + 3|$

Per definizione si ha:

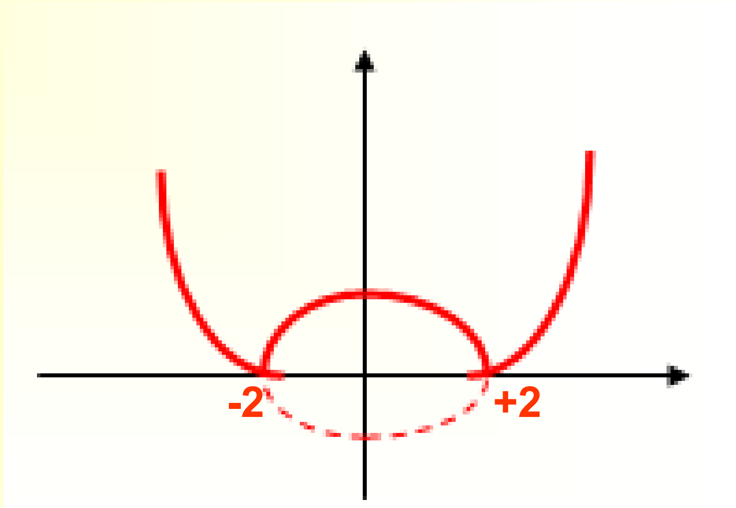
$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x + 3 \text{ se } x + 3 \geq 0 \\ -x - 3 \text{ se } x + 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 3 \text{ se } x \geq -3 \\ -x - 3 \text{ se } x < -3. \end{cases}$$

Quando una funzione è contenuta in un modulo **per disegnarla** basta disegnare la funzione senza modulo e poi riportare sopra l'asse delle x la parte che si trova sotto l'asse (simmetria assiale rispetto all'asse x)



Proviamo ora a disegnare il grafico della funzione **$f(x) = |x^2-4|$.**

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ se } x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 \text{ se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$



La funzione esponenziale

Definizione: dato $x \in R$, la legge che associa $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}^{x}$, con $a > 0$ e diverso da 1, è detta funzione esponenziale.

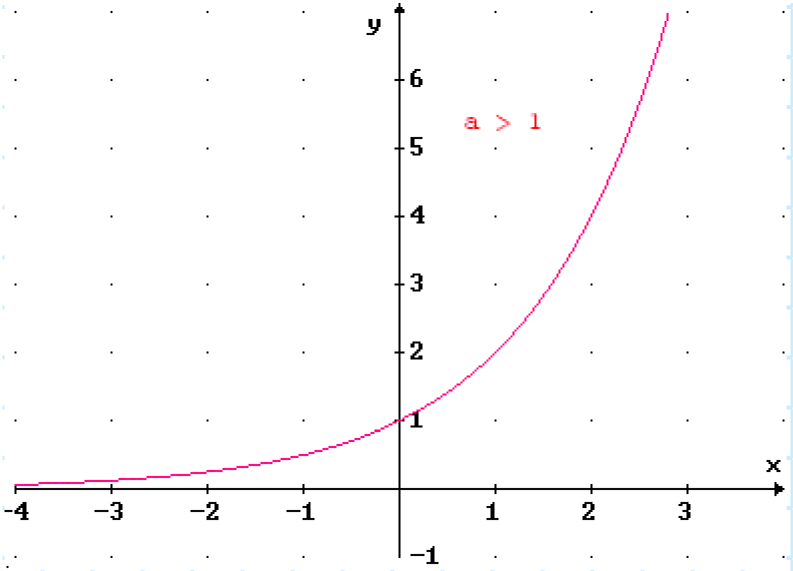
$$\boxed{\begin{aligned} f: \mathrm{R} &\rightarrow \mathrm{R}^{+} \\ x &\mapsto a^{x}. \end{aligned}}$$

Se $a = 1$ la funzione si riduce a una funzione costante $1^x = 1$; $y = 1$, il cui grafico è la retta parallela all'asse x passante per il punto (0;1)

Il suo grafico è detto **curva esponenziale**; il suo **dominio** è R e il suo **codominio** è R^+ cioè l'intervallo $(0; +\infty)$

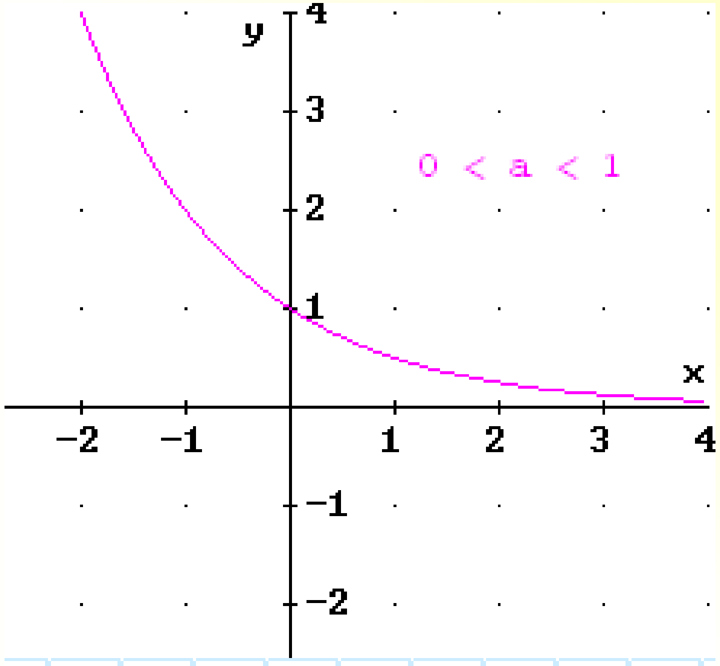
Per disegnare la curva esponenziale dobbiamo distinguere due casi

$a > 1$ e $0 < a < 1$



Caratteristiche:

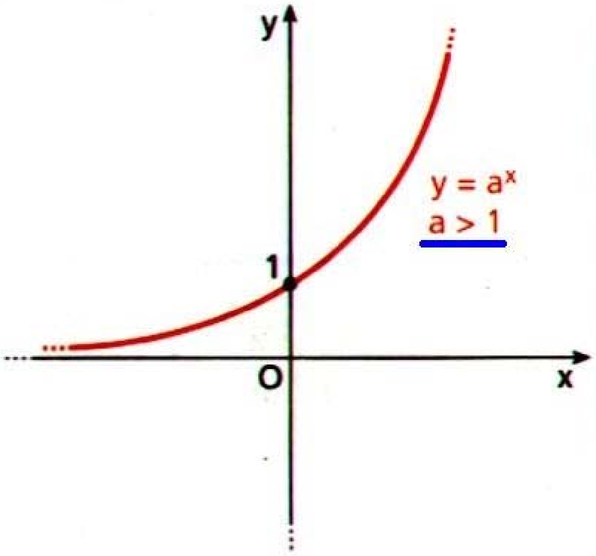
- **Dominio**: **R**
- **Codominio** (Insieme immagine): **R + = (0 , + ∞)**
- **Segno**: **$y = a^x > 0 \ \forall x \in R$**
- Funzione **monotona crescente** , **biiettiva** (e pertanto invertibile)
- **Passa** per (0,1)
- Poiché la curva si avvicina indefinitamente all'asse x per x —> - ∞, si dice che **y = 0** è **asintoto orizzontale sinistro**.



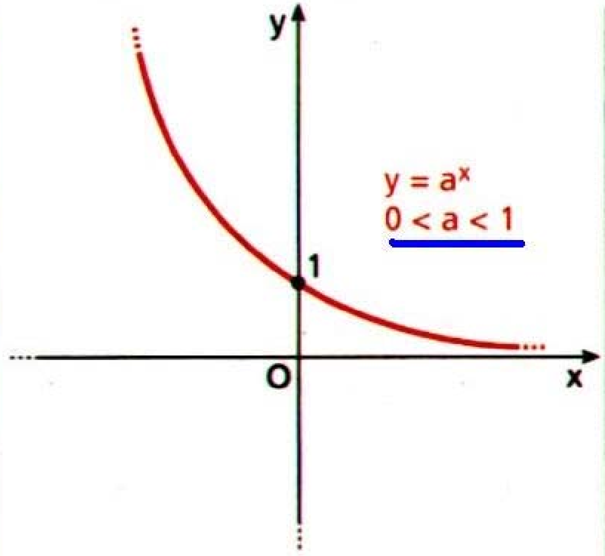
Caratteristiche:

- **Dominio**: **R**
- **Codominio** (Insieme Immagine): **R + = (0 , + ∞)**
- **Segno**: **$y = a^x > 0 \ \forall x \in R$**
- Funzione **monotona decrescente** , **biiettiva** (e pertanto invertibile)
- **Passa** per (0,1)
- Poiché la curva si avvicina indefinitamente all'asse x per x —> + ∞, si dice che **y = 0** è **asintoto orizzontale destro**.

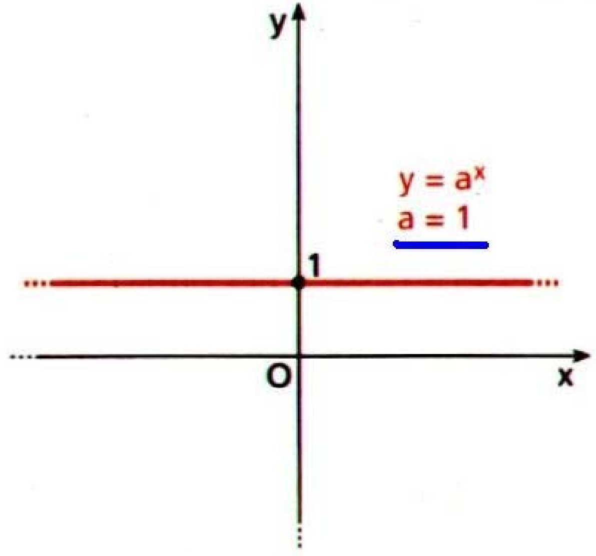
Tabella riepilogativa



a.
- C.E.: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



b.
- C.E.: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

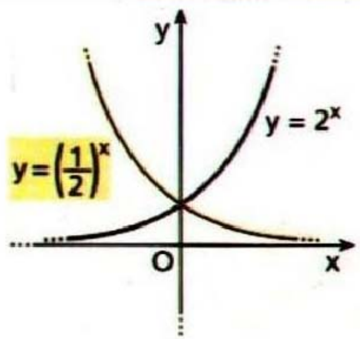


c.
- C.E.: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\{1\}$;
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

Osservazione

Il grafico di y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è **simmetrico** rispetto **all'asse y** di quello di y = 2^x. Infatti una simmetria rispetto all'asse y trasforma

y = 2^x in y = 2^{-x} = $\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Definizione di logaritmo

<u>Definizione:</u> Dati due numeri positivi a e b , con $a \neq 1$, si chiama *logaritmo* in base a del numero b, <u>l'esponente</u> x da dare alla base a per ottenere b.

$$\text{Log}_a b = x \longleftrightarrow a^x = b$$

In base alla definizione si ha che

$\text{Log}_a 1 = 0$ $\quad$ $\text{Log}_a a = 1$ $\quad$ (sempre con $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$)

Es. Trovare il valore dei seguenti logaritmi:

1) $\log_2 16 = x$ significa $2^x = 16$; $2^x = 2^4$ (cioè occorre trovare quel numero che messo come esponente al 2 dà 16). L'esponente vale 4 quindi

$\log_2 16 = 4$

2) $\log_{10} 1000 = x$ $\quad$ $\log_{10} 1000 = 3$

3) $\log_a 0 = x$ $\quad$ $a^x = 0$

Nessun numero, non nullo, elevato a potenza mi può dare come risultato zero, quindi $\log_a 0 = x$ **Non ha significato**

Proprietà fondamentali:

$$a^{\log_a b} = b$$ **Esempio** $$5^{\log_5 x} = x$$

$$\log_a a^c = c$$ **Esempio** $$\log_6 6^x = x$$

1) il $\log_a b$ è **positivo** se $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \rightarrow e \rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$

2) il $\log_a b$ è **negativo** se $\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \rightarrow e \rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$

3) $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$

4) $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$

5) Se due numeri sono **uguali**, anche i loro **logaritmi** (rispetto alla stessa base) sono **uguali**;

6) Non esiste il logaritmo di un numero negativo!

Teoremi sui logaritmi

Logaritmo di un prodotto

Regola: Il logaritmo di un prodotto e' uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Quindi se dobbiamo fare un prodotto piuttosto complicato possiamo trasformare i fattori in logaritmi, farne la somma e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato

Es. Vogliamo calcolare **16·64**
Trasformiamo in logaritmi, ad esempio in base 2
$\log_2 16 = 4$ $\log_2 64 = 6$
facciamo la somma
$4 + 6 = 10$
questo è il logaritmo del risultato, per trovare il risultato devo metterlo come esponente alla base
$2^{10} = 1024$
quindi
16·64 = 1024

Logaritmo di un quoziente

Regola: Il logaritmo di un quoziente e' uguale alla differenza dei logaritmi dei singoli fattori

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Quindi se dobbiamo fare un quoziente piuttosto complicato possiamo trasformare i termini in logaritmi, farne la differenza e poi fare l'antilogaritmo per trovarne il risultato

Es. Vogliamo calcolare **1024 : 64**

Trasformiamo in logaritmi, ad esempio in base 2

$\log_2 1024 = 10$ $\log_2 64 = 6$

facciamo la differenza

$10 - 6 = 4$

questo è il logaritmo del risultato, per trovare il risultato devo metterlo come esponente alla base

$2^4 = 16$

quindi

1024: 64 = 16

Logaritmo di una potenza

Regola: Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza

$$\log_a (b)^c = c \log_a b$$

Logaritmo di un radicale

Regola: Il logaritmo di un radicale è uguale al quoziente del logaritmo del radicando per l'indice del radicale; cioè:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Cambiamento di base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

La funzione logaritmica

<u>Definizione</u>: dato un numero reale $a > 0$ e diverso da 1, **la funzione di R^+ in R che associa $x \rightarrow f(x) = \log_a x$ si dice** **funzione logaritmica di base a.**

$$\boxed{\begin{aligned} f : R^+ &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow \log_a x \end{aligned}}$$

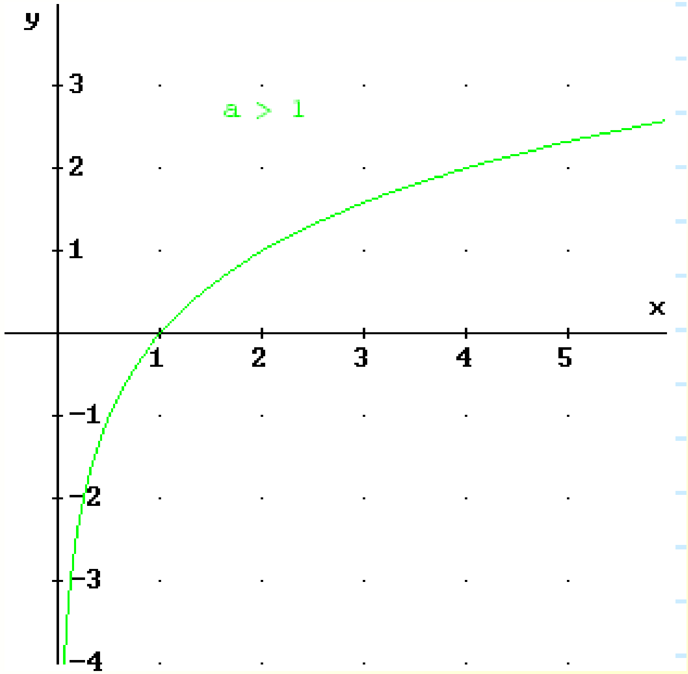
Essa è la funzione inversa della funzione esponenziale di base a.

Il suo grafico è detto **curva logaritmica**; il suo **dominio** è R^+ cioè l'intervallo $(0; +\infty)$

e il suo **codominio** è R cioè l'intervallo $(-\infty; +\infty)$

Per disegnare la curva logaritmica dobbiamo distinguere due casi

$a > 1$ e $0 < a < 1$



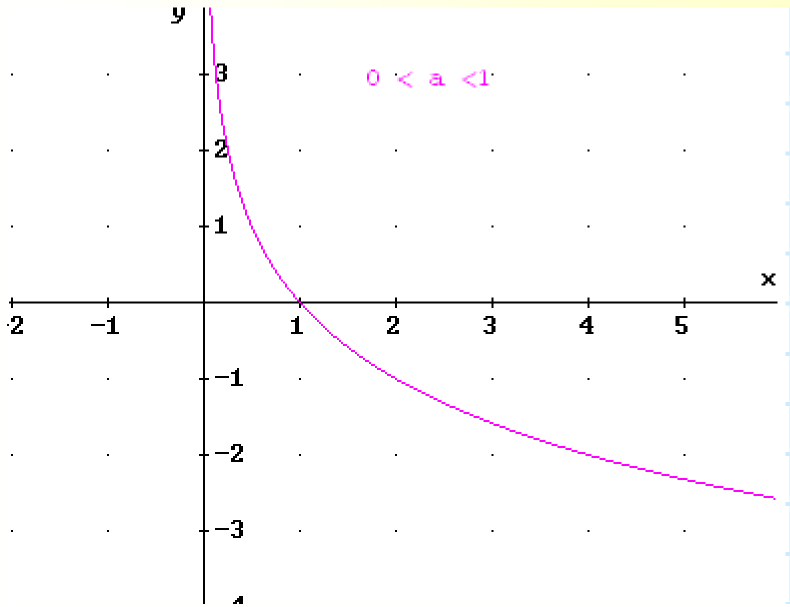
Caratteristiche:

- **Dominio**: **R + = (0;+∞)**
- **Codominio**: **R = (-∞ ; +∞)**
- **Segno**:

log $_a$ x > 0 se x > 1

log $_a$ x < 0 se 0 < x < 1

- Funzione **monotona crescente**
- Funzione **biiettiva** (e pertanto invertibile)
- **Passa** per (1,0)
- L'asse y è un **asintoto verticale** per la curva logaritmica.



Caratteristiche:

-**Dominio**: **R + = (0;+∞)**

-- **Codominio**: **R = (-∞ ; +∞)**

-- **Segno**:

log $_a$ x < 0 se x > 1

log $_a$ x > 0 se 0 < x < 1

- Funzione **monotona decrescente**
- Funzione **biiettiva** (e pertanto invertibile)
- **Passa** per (1,0)
- L'asse y è **asintoto verticale** per la curva logaritmica.

Esercizi *a cura del prof. Mauro La Barbera*

1)	$\log_{11} 1 = x$	$11^x = 1$	$11^x = 11^0$	$x = 0$.		
2)	$\log_6 6 = x$	$6^x = 6$	$6^x = 6^1$	$x = 1$.		
3)	$\log_7 49 = x$	$7^x = 49$	$7^x = 7^2$	$x = 2$.		
4)	$\log_3 27 = x$	$3^x = 27$	$3^x = 3^3$	$x = 3$.		
5)	$\log_2 16 = x$	$2^x = 16$	$2^x = 2^4$	$x = 4$.		
6)	$\log_2 32 = x$	$2^x = 32$	$2^x = 2^5$	$x = 5$.		
7)	$\log_8 2 = x$	$8^x = 2$	$2^{3x} = 2$	$3x = 1$	$x = \frac{1}{3}$.	
8)	$\log_6 36 = x$	$6^x = 36$	$6^x = 6^2$	$x = 2$.		
9)	$\log_{36} 6 = x$	$36^x = 6$	$6^{2x} = 6$	$2x = 1$	$x = \frac{1}{2}$.	
10)	$\log_9 81 = x$	$9^x = 81$	$3^{2x} = 3^4$	$2x = 4$	$x = \frac{4}{2}$	$x = 2$.
11)	$\log_9 27 = x$	$9^x = 27$	$3^{2x} = 3^3$	$2x = 3$	$x = \frac{3}{2}$.	

ESERCIZI

12) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = x$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad x = -1$.

13) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = x$ $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^2 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad x = -2$.

14) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = x$ $\quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^3 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \quad x = -3$.

15) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^3 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad x = -3$.

16) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 64 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^6 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \quad x = -6$.

17) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^1} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \quad x = 1$.

18) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \quad x = 2$.

19) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} = x$ $\quad \left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{49} \quad \left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{7^2} \quad \left(\frac{1}{7}\right)^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{2} \quad x = 2$.

ESERCIZI

20) $\log_2 \frac{1}{64} = x \qquad 2^x = \frac{1}{64} \qquad 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \qquad 2^x = 2^{-6} \qquad x = -6$.

21) $\log_2 \frac{1}{128} = x \qquad 2^x = \frac{1}{128} \qquad 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \qquad 2^x = 2^{-7} \qquad x = -7$.

22) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} = x \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \qquad x = 7$.

23) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = x \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad x = 2$.

24) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81} = x \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \qquad x = 4$.

25) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4} = x \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{25}{4} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \qquad x = -2$.

26) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{125}{27} = x \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{125}{27} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \qquad x = -3$.

27) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = x \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \qquad 2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$.

ESERCIZI

28) $\log_{\frac{49}{36}} \frac{6}{7} = x \qquad \left(\frac{49}{36}\right)^x = \frac{6}{7} \qquad \left(\frac{7}{6}\right)^{2x} = \left(\frac{7}{6}\right)^{-1} \qquad 2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2}$.

29) $\log_2 \sqrt{2} = x \qquad 2^x = \sqrt{2} \qquad 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \qquad x = \frac{1}{2}$.

30) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \qquad 2^x = \sqrt[3]{2} \qquad 2^x = 2^{\frac{1}{3}} \qquad x = \frac{1}{3}$.

31) $\log_2 \sqrt[3]{4} = x \qquad 2^x = \sqrt[3]{4} \qquad 2^x = \sqrt[3]{2^2} \qquad 2^x = 2^{\frac{2}{3}} \qquad x = \frac{2}{3}$.

32) $\log_3 \sqrt[3]{3} = x \qquad 3^x = \sqrt[3]{3} \qquad 3^x = 3^{\frac{1}{3}} \qquad x = \frac{1}{3}$.

33) $\log_3 \sqrt[3]{9} = x \qquad 3^x = \sqrt[3]{9} \qquad 3^x = \sqrt[3]{3^2} \qquad 3^x = 3^{\frac{2}{3}} \qquad x = \frac{2}{3}$.

34) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = x \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{\frac{2}{3}} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \qquad x = -\frac{2}{3}$.

35) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{5} = x \qquad \left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt[3]{5} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} \qquad x = -\frac{1}{3}$.