Moduli o valori assoluti

Equazioni - Disequazioni

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Definizione di modulo o valore assoluto

Se x è un generico numero reale, il suo **modulo** o **valore assoluto** è:

$|x| = x$ se $x>0$ $\quad |0| = 0 \quad$ $|x| = -x$ se $x<0$

Di solito questa definizione viene così schematizzata

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Ad esempio

$|+3| = +3 = 3$

$|-3| = -(-3) = +3 = 3$

$|0| = 0$

Nella scrittura $|x|$, x è chiamato **argomento** de modulo.

La definizione di modulo di un numero reale si estende al caso in cui l'argomento sia una generica espressione letterale.

Consideriamo $|f(x)|$, dove f(x) è un'espressione nella variabile x, si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo l'espressione $|x - 3|$. Applicando la definizione di modulo avremo

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} \Longrightarrow |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Dalla definizione di modulo si seduce che il **valore assoluto** di un numero diverso da zero è sempre positivo. Pertanto

$|0| = 0$ per $x=0$ $|x|>0$ per $x \neq 0$

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in R$ $|x|<0$ per nessun $x \in R$

Ad esempio

$|x+3| = 0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow$ **$x = -3$**

$|x-3| < 0$ è impossibile perché il modulo di un numero non può essere negativo

$|2x-5| \geq 0$ $\forall x \in R$ infatti il modulo di un numero reale è sempre positivo o nullo.

Ancora dalla definizione si deduce che **numeri opposti hanno lo stesso modulo** **$|\pm 3| = 3$**

e

due numeri hanno lo stesso valore assoluto se sono uguali o se sono opposti **$|3x-2| = |2-3x|$**

Risoluzione di equazioni con valori assoluti

Per risolvere equazioni che presentano valori assoluti conviene studiare il segno delle espressioni dentro i valori assoluti e poi impostare più sistemi.

Vediamo alcuni esempi di

Equazioni con un solo valore assoluto

e

Equazioni con due valori assoluti

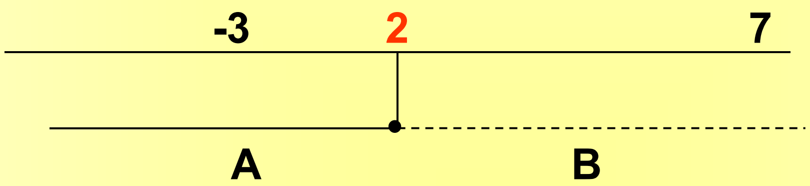
Equazione con un solo valore assoluto

Es. n.1 $|2-x| = 5$

Studiamo il segno dell'argomento dentro il modulo:

$2-x \geq 0$ per $x \leq 2$

Rappresentiamo il segno del modulo su un grafico



Abbiamo individuato due zone: **A** dove l'argomento è positivo e **B** dove l'argomento è negativo.

In base al quadro ottenuto impostiamo due sistemi, uno relativo ai valori dove l'argomento è positivo (≤ 2) e l'atro relativo ai valori dove l'argomento è negativo (>2)

$$A \begin{cases} x \leq 2 \\ 2-x = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Soluzione accettabile perché – 3 è < 2

$$B \begin{cases} x > 2 \\ -(2-x) = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Soluzione accettabile perché 7 è > 2

La soluzione dell'equazione data dall'unione

S: $x = -3 \;\vee\; x = 7$

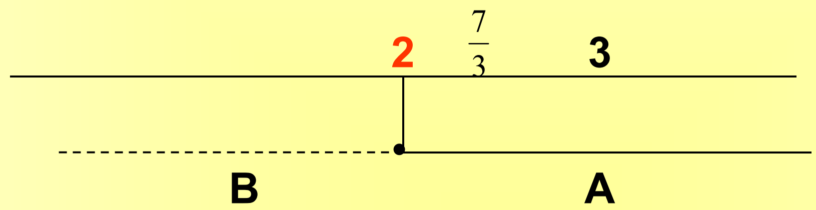
Equazione con un solo valore assoluto

Es. n.2 $\boxed{|x-2| = 2x - 5}$

Studiamo il segno dell'argomento dentro il modulo:

x-2 ≥0 per **x ≥ 2**

Rappresentiamo il segno del modulo su un grafico



Abbiamo individuato due zone: **A** dove l'argomento è positivo e **B** dove l'argomento è negativo.

In base al quadro ottenuto impostiamo due sistemi, uno relativo ai valori dove l'argomento è positivo (≥ 2) e l'atro relativo ai valori dove l'argomento è negativo (< 2)

$$A\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 = 2x-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Soluzione accettabile perché 3 è > 2

$$B\begin{cases} x < 2 \\ -(x-2) = 2x-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ \cancel{x = \frac{7}{3}} \end{cases}$$

Soluzione non accettabile perché $\frac{7}{3}$ **non è < 2**

La soluzione dell'equazione data è

S: x = 3

Equazione con un solo valore assoluto

Es. n.3 $|x+2| + x^2 = -2(2x+1)$

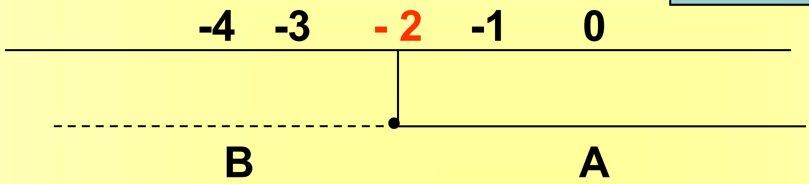
Studiamo il segno dell'argomento dentro il modulo:

$x+2 \geq 0$ per $x \geq -2$

Rappresentiamo il segno del modulo su un grafico

La soluzione dell'equazione data è

S: $x = -1 \quad \vee \quad x = -3$



Abbiamo individuato due zone: **A** dove l'argomento è positivo e **B** dove l'argomento è negativo.

In base al quadro ottenuto impostiamo due sistemi, uno relativo ai valori dove l'argomento è positivo (≥ -2) e l'atro relativo ai valori dove l'argomento è negativo (< -2)

$$A \begin{cases} x \geq -2 \\ x+2+x^2 = -2(2x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+5x+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2 \\ \cancel{x=-4};\ x=-1 \end{cases}$$

La soluzione $x = -4$ non è accettabile perché -4 non è >-2

$$B \begin{cases} x < -2 \\ -(x+2)+x^2 = -2(2x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -2 \\ x^2+3x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -2 \\ \cancel{x=0};\ x=-3 \end{cases}$$

La soluzione $x = 0$ non è accettabile perché 0 non è <-2

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Equazione con due valori assoluti

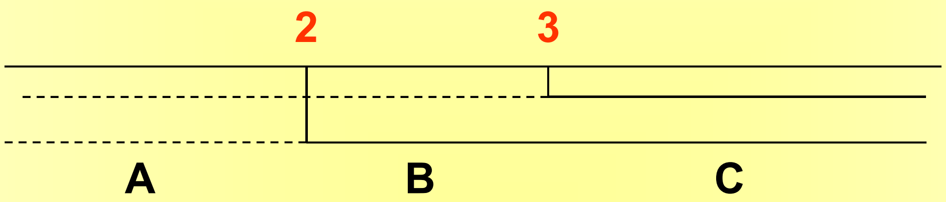
Es. n.1 $|2x-6| + x = |x - 2| + 3$

Otteniamo due capisaldi , il 2 e il 3. Sistemiamo i capisaldi dal più piccolo al più grande e suddividiamo la retta in tre zone.

Studiamo i segni degli argomenti dentro i moduli:

$2x-6 \geq 0$ per $x \geq 3$

$x - 2 \geq 0$ per $x \geq 2$



Abbiamo individuato tre zone: **A, B e C.** Impostiamo tre sistemi.

A $\begin{cases} x < 2 \\ -(2x-6)+x = -(x-2)+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ 6=5 \text{ imp.} \end{cases}$

B $\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ -(2x-6)+x = x-2+3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$ **Soluzione accettabile**

C $\begin{cases} x \geq 3 \\ 2x-6+x = x-2+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$ **Soluzione accettabile**

La soluzione dell'equazione data è

S: $x = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7}{2}$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Equazione con due valori assoluti

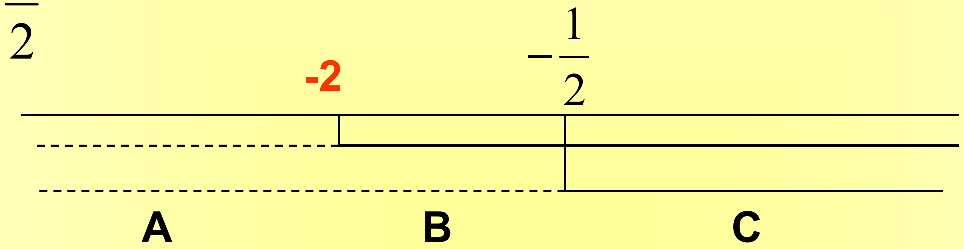
Es. n.2 $|x+2| + |2x+1| = 2$

Studiamo i segni degli argomenti dentro i moduli:

X+2 ≥0 per **x ≥ -2**

2x+1 ≥0 per **x ≥** $-\frac{1}{2}$

Otteniamo due capisaldi, -2 e $-\frac{1}{2}$
Sistemiamo i capisaldi dal più piccolo al più grande e suddividiamo la retta in tre zone.



Abbiamo individuato tre zone: **A, B e C.** Impostiamo tre sistemi.

$$A\begin{cases} x < -2 \\ -(x+2)-(2x+1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -2 \\ X = \cancel{-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Soluzione non accettabile perché non è <-2

$$B\begin{cases} -2 \leq x < -\frac{1}{2} \\ x+2-(2x+1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \leq x < -\frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluz. acc.

$$C\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x+2+2x+1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Soluzione accettabile

La soluzione dell'equazione data è

S: $x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{3}$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

In sintesi

Per risolvere un'equazione con valori assoluti

1) Studiamo i segni degli argomenti dentro i valori assoluti
2) Disponiamo i capisaldi trovati dal più piccolo al più grande
3) Scriviamo i segni degli argomenti
4) Impostiamo tanti sistemi quanti sono gli intervalli determinati dai capisaldi
5) Risolviamo i sistemi
6) Uniamo le soluzioni

Risoluzione di disequazioni con valori assoluti

Le disequazioni contenenti moduli, se non sono risolubili in *modo immediato* o se non sono della forma $|f(x)| \gtrless K$, *con* $K>0$, si risolvono con un procedimento analogo a quello illustrato in precedenza per le equazioni.

Vediamo alcuni esempi di

a) Risoluzione immediata di particolari disequazioni con valori assoluti

b) Disequazioni della forma $|f(x)| < K$ con $K > 0$

c) Disequazioni della forma $|f(x)| > K$ con $K > 0$

d) Disequazioni con valori assoluti

a) Risoluzione immediata di particolari disequazioni con valori assoluti

- **$|x-3| < 0$ è impossibile** perché il modulo di un numero non può essere negativo
- **$|x-5| \geq 0$ è sempre verificata** infatti il modulo di un numero reale è sempre positivo o nullo.
- **$|x-5| > 0$ è soddisfatta per $x \neq 5$** (infatti per $x=5$ la disequazione diviene la diseguaglianza $0>5$ che è falsa)
- **$|x-5| > -3$ è sempre verificata** infatti il modulo di un numero reale essendo sempre positivo o nullo è maggiore di un numero negativo.
- **$|x-5| < -3$ è impossibile**
- **$|x-1| + |x^2-1| > 0$ è soddisfatta per $x \neq 1$** (infatti per $x=1$ i due moduli sono contemporaneamente nulli e la disequazione diviene la diseguaglianza $0>0$ che è falsa)
- **$|x-1| + |x-6| > 0$ è sempre verificata** (infatti i due moduli non possono essere contemporaneamente nulli.

b) Disequazioni della forma $|\,f(x)\,| < K$ con $K > 0$

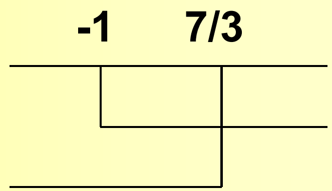
$|\,f(x)\,| < K \longleftrightarrow -k < f(x) < k, \quad k>0$

$-k < f(x) < k$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$$

Es. $|\,3x - 2\,| < 5$

$$-5 < 3x - 2 < 5 \longrightarrow \begin{cases} 3x - 2 > -5 \\ 3x - 2 < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > -3 \\ 3x < 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 7/3 \end{cases}$$



La soluzione è

$-1 < x < 7/3$

$S = S_1 \wedge S_2$

Si può anche risolvere così:

$$-5 < 3x - 2 < 5$$

$$-5 + 2 < 3x < 5 + 2$$

$$-3 < 3x < 7 \qquad \text{dividendo per 3}$$

$$-1 < x < 7/3$$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

c) Disequazioni della forma $|f(x)| > K$ con $K > 0$

$|f(x)| > K \longleftrightarrow f(x) < -k \lor f(x) > k, \quad k > 0$

Es. $|2x + 1| > 9$

$2x + 1 < -9$ oppure $2x + 1 > 9$

$2x < -10 \lor 2x > 8$

$x < -5 \lor x > 4$

$S = S_1 \lor S_2$

Se $K < 0$

$|f(x)| > K$ per ogni x

es. $|x-5| > -3$

$|f(x)| < K$ imposs.

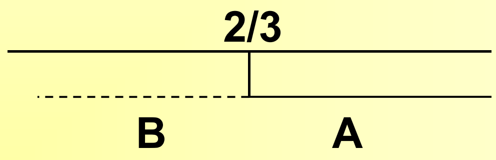
es. $|x-5| < -3$

d) Disequazioni con valori assoluti

$\boxed{|3x - 2| < 5 - x}$

Studiamo il segno del modulo

$3x - 2 \geq 0 \longrightarrow x \geq 2/3$

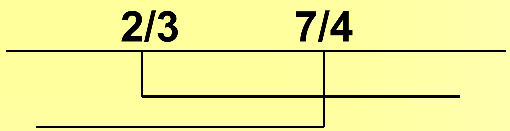


Rappresentiamo il segno del modulo su un grafico

Abbiamo individuato due zone: **A** dove l'argomento è positivo e **B** dove l'argomento è negativo.

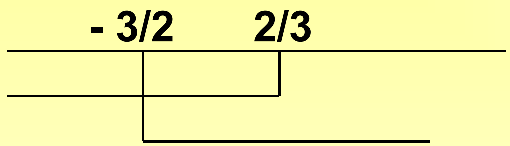
In base al quadro ottenuto impostiamo due sistemi, uno relativo ai valori dove l'argomento è positivo (≥ 2/3) e l'atro relativo ai valori dove l'argomento è negativo (< 2/3)

$$A \begin{cases} x \geq 2/3 \\ 3x - 2 < 5 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2/3 \\ x < 7/4 \end{cases}$$



$\boxed{2/3 \leq x < 7/4}$

$$B \begin{cases} x < 2/3 \\ -(3x - 2) < 5 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2/3 \\ x > -3/2 \end{cases}$$



$\boxed{-3/2 < x < 2/3}$

Uniamo i due intervalli e avremo la soluzione

$\boxed{-3/2 < x < 7/4}$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni