

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Equazioni esponenziali

L'equazione esponenziale è un'equazione in cui l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza

La forma canonica di un'equazione esponenziale è:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{Con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Le equazioni esponenziali, che si presentano in forma canonica, si risolvono con il passaggio agli esponenti, cioè considerando l'equazione che si ottiene uguagliando gli esponenti.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$$

Esempi di equazioni esponenziali

1) $2^x = \frac{1}{8}$ Si può porre nella forma canonica $2^x = 2^{-3}$ Quindi $x = -3$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} = 4^x$ $(2^{-1})^{3x+5} = (2^2)^x \rightarrow 2^{-3x-5} = 2^{2x} \rightarrow -3x-5=2x \rightarrow$
 $\rightarrow -5x=5 \rightarrow$ $x = -1$

3) $2^x = -4$ L'equazione è impossibile in quanto 2^x non può mai essere uguale ad un numero negativo

4) $2^x = 0$ L'equazione è impossibile in quanto 2^x non può mai essere uguale a zero

Esempi di equazioni esponenziali

$$5) (0,1)^x = 10 \rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = 10 \rightarrow 10^{-x} = 10 \rightarrow -x = 1 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$6) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 4 \quad (2^{-1})^{x-2} = (2^2) \rightarrow 2^{-x+2} = 2^2 \rightarrow -x+2 = 2 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$7) \left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)^x = \frac{25}{4} \quad \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \rightarrow \frac{x}{3} = -2 \rightarrow \boxed{x = -6}$$

$$8) 7^x = 9 \quad \text{Log}_7 7^x = \log_7 9 \rightarrow \boxed{x = \log_7 9}$$

Esempi di equazioni esponenziali

9) $7^{\sqrt{x^2-1}} = 49 \rightarrow 7^{\sqrt{x^2-1}} = 7^2 \rightarrow \sqrt{x^2-1} = 2$

C.E. $x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

Elevando al quadrato i due membri dell'equazione otteniamo:

$$x^2 - 1 = 4 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

Soluzioni accettabili
in base alle C.E.

Disequazioni esponenziali

La **disequazione esponenziale** è una disequazione in cui l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza

La **forma canonica** di una disequazione esponenziale è:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \text{Con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Per risolvere tali disequazioni basta ricordare l'andamento della curva esponenziale.

Pertanto

- se è $a > 1$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se è $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Quindi:

Una disequazione esponenziale, i cui membri sono potenze di una stessa **base** > 1 , equivale a una disequazione **dello stesso verso** tra gli esponenti di tali potenze. Es. $2^x > 2^3 \rightarrow x > 3$

Una disequazione esponenziale, i cui membri sono potenze di una stessa **base positiva** < 1 , equivale a una disequazione **di verso contrario** tra gli esponenti di tali potenze.

$$\text{Es. } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x < 2$$

Esempi di disequazioni esponenziali

1) $2^{x+1} < 2^{3x-2} \rightarrow x+1 < 3x-2 \rightarrow x-3x < -1-2 \rightarrow -2x < -3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1+3x} \rightarrow 2x > 1+3x \rightarrow 2x-3x > 1 \rightarrow x < -1$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+7} > 16 \rightarrow 4^{-x-7} > 4^2 \rightarrow -x-7 > 2 \rightarrow -x > 9 \rightarrow x < -9$

4) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0 \rightarrow (2^2)^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0 \rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

Pongo $2^x = y \rightarrow y^2 - 10y + 16 < 0$ Verificata per $2 < y < 8$ cioè $2 < 2^x < 8 \rightarrow 2^1 < 2^x < 2^3 \rightarrow$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni \longrightarrow

$$1 < x < 3$$