EQUAZIONI
E
DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Definizione e proprietà dei logaritmi

Il **logaritmo in base a** , con a > 0 e a ≠ 1, del numero b è l'esponente da attribuire alla base a per ottenere il numero b.

$$x = \log_a b \leftrightarrow a^x = b$$ Con a >0, a≠1, b >0

Teoremi

Logaritmo di un prodotto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo di un quoziente

$$\log_a b/c = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo di una potenza

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Equazioni logaritmiche

Un'equazione logaritmica è un'equazione in cui l'incognita figura nell'argomento di uno o più logaritmi

Per risolvere un'equazione logaritmica, applicando i teoremi sui logaritmi si riduce l'equazione nella forma canonica

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$ Uguaglianza tra logaritmi con la stessa base

Per risolvere l'equazione è possibile passare agli argomenti

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$$ e risolvere l'uguaglianza tra gli argomenti

IMPORTANTE: occorre determinare le **C**ondizioni di **A**ccettabilità delle soluzioni, ponendo **>0 tutti gli argomenti dei logaritmi** che contengono l'incognita risolvendo la disequazione o il sistema di disequazioni. Risolta poi l'equazione si dovrà verificare quali tra i risultati sono *soluzioni accettabili*.

Se l'equazione si presenta nella forma $\log_a f(x) = b$ basta applicare la definizione di logaritmo: $\log_a f(x) = b \rightarrow f(x) = a^b$

Esempi di equazioni logaritmiche

1) $\mathrm{Log}_2\, x = 4$ C.E. $x>0$

Per definizione di logaritmo (è l'esponente che bisogna dare alla base per ottenere l'argomento) si ha: $x = 2^4 \rightarrow \boxed{x = 16}$

Ricordando C.E. si ha che **x = 16** è maggiore di zero e quindi è una **soluzione accettabile.**

2) $\mathrm{Log}_5\, (x-3) = 2$ C.E. $x-3>0 \rightarrow x > 3$

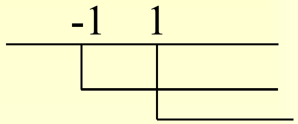
$x-3 = 5^2 \rightarrow x-3 = 25 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x = 28}$

Ricordando C.E. si ha che **x = 28** è maggiore di 3 e quindi è una **soluzione accettabile.**

Esempi di equazioni logaritmiche

3) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - 3 = 0$ C.E. $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x>1$



Portiamo -3 a destra dell'uguale

$$\mathbf{\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3}$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi

$$\mathbf{\log_2[(x+1)(x-1)] = 3}$$

Ricordando la definizione di logaritmo

$$(x+1)(x-1) = 2^3$$

risolvendo

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \begin{cases} \cancel{-3} \\ +3 \end{cases}$$

Ricordando C.E. **x= -3 non è accettabile** perché non è maggiore di 1, mentre **x = 3 è soluzione accettabile**.

Esempi di equazioni logaritmiche

3) $2\log_2(x+1) + \log_4(x+1) = 5$ C.E. $x+1>0 \longrightarrow x > -1$

I logaritmi hanno basi diverse. Trasformiamo entrambi i logaritmi in base 4, ricordando la **formula del cambiamento base**

$$\frac{2\log_4(x+1)}{\log_4 2} + \log_4(x+1) = 5 \longrightarrow \frac{2\log_4(x+1)}{\frac{1}{2}} + \log_4(x+1) = 5$$

$$4\log_4(x+1) + \log_4(x+1) = 5 \longrightarrow 5\log_4(x+1) = 5$$ Dividendo per 5

$$\log_4(x+1) = 1$$ Ricordando la definizione di logaritmo

$$x+1 = 4^1 \longrightarrow \boxed{x = 3}$$

Ricordando C.E. **x = 3 è soluzione accettabile**.

Disequazioni logaritmiche

La disequazione logaritmica è una disequazione in cui l'incognita figura nell'argomento di uno o più logaritmi.

Per risolvere una disequazione logaritmica si cerca di scriverla nella **forma canonica:**

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

Naturalmente al posto di <, può apparire >, ≤, ≥

IMPORTANTE: occorre determinare le **C**ondizioni di **A**ccettabilità delle soluzioni, ponendo **>0 tutti gli argomenti dei logaritmi** che contengono l'incognita risolvendo la disequazione o il sistema di disequazioni.

Per la risoluzione della disequazione data si procede con il *passaggio agli argomenti*, ma qui si possono presentare due casi:

- **se è a > 1** la disequazione tra gli argomenti ha **lo stesso verso** di quella tra i logaritmi
- **se è 0< a < 1** la disequazione tra gli argomenti ha **verso opposto** di quella tra i logaritmi

Le soluzioni della disequazione così ottenute, per **essere accettabili**, dovranno anche soddisfare le **C.A.**

Esempi di disequazioni logaritmiche

1) $\log_2(2x-4) < 3$ C.A. $2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$ $3 = \log_2 2^3$

Per definizione

di logaritmo

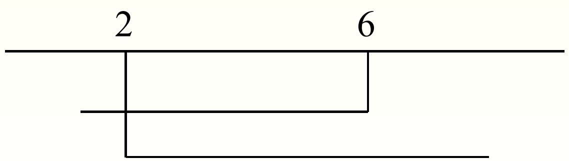
$\log_2(2x-4) < \log_2 2^3$

La base è 2 >1, la disequazione tra gli argomenti ha quindi **lo stesso verso** di quella tra i logaritmi

$2x-4 < 2^3$

$2x - 4 < 8 \rightarrow \boxed{x < 6}$

Le condizioni $\boxed{x < 6}$ e $\boxed{x > 2}$ (C.A.) devono essere verificate contemporaneamente



La soluzione della disequazione è:

$S = \{ x \in R \mid 2 < x < 6\}$

Esempi di disequazioni logaritmiche

2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > -1$ C.A. $x - 1 > 0 \rightarrow \boxed{x > 1}$

$-1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

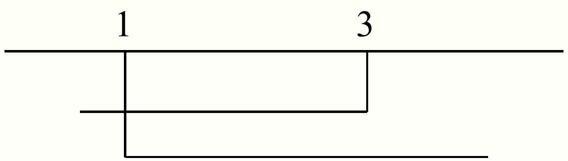
Per definizione di logaritmo

$x - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x - 1 < 2 \rightarrow \boxed{x < 3}$

La base è $\frac{1}{2} < 1$, la disequazione tra gli argomenti ha quindi **verso opposto** di quella tra i logaritmi

Le condizioni $\boxed{x < 3}$ e $\boxed{x > 1}$ (C.A.) devono essere verificate contemporaneamente



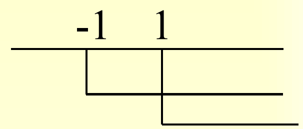
La soluzione della disequazione è:

$$S = \{\, x \in R \mid 1 < x < 3 \,\}$$

Esempi di disequazioni logaritmiche

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 3\log_{\frac{1}{3}} 2$

C.E. $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x>1}$



Applichiamo le proprietà dei logaritmi

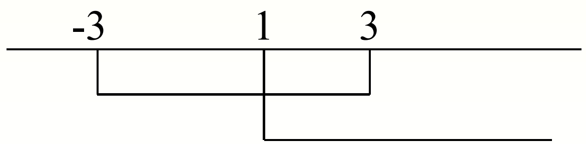
$\log_{\frac{1}{3}}[(x+1)(x-1)] > \log_{\frac{1}{3}} 2^3$

La base è $\frac{1}{3}<1$, la disequazione tra gli argomenti ha quindi **verso opposto** di quella tra i logaritmi

$(x+1)(x-1) < 2^3$

$x^2 - 1 < 8 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow \boxed{-3 < x < 3}$

Le condizioni $\boxed{-3 < x < 3}$ e $\boxed{x > 1}$ (C.A.) devono essere verificate contemporaneamente



La soluzione della disequazione è:

$S = \{ x \quad R \mid 1 < x < 3\}$