EQUAZIONI
E
DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice si dice **equazione irrazionale**

Sono irrazionali le seguenti equazioni:

$\sqrt{2x-3}=5-2x$ $\sqrt[3]{x+1}+x=3$ $\sqrt{x}=\sqrt[3]{x+2}-3$

Non sono irrazionali le seguenti equazioni:

$x\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$ $x^2+x\sqrt{5}+3=0$

EQUAZIONI IRRAZIONALI CONTENENTI **RADICALI QUADRATICI**

Per risolverle occorre cercare di eliminare i radicali, elevando al quadrato entrambi i membri.

L'equazione che si ottiene può però avere delle soluzioni diverse rispetto a quelle dell'equazione data, cioè delle **soluzioni estranee**, che non sono soluzioni dell'equazione da risolvere.

È pertanto necessario eseguire la verifica delle soluzioni trovate, sostituendole al posto dell'incognita nell'equazione data.

EQUAZIONI IRRAZIONALI CONTENENTI RADICALI QUADRATICI

Es. $\boxed{\sqrt{2x-3} = 5-2x}$

Elevando al quadrato entrambi i membri, si ha:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = (5-2x)^2 \rightarrow 2x-3 = 25-20x+4x^2 \rightarrow 2x^2-11x+14=0$$

x=2

x=7/2

Verifichiamo ora le soluzioni trovate, sostituendole alla x dell'equazione data

x = 2 $\rightarrow \sqrt{2*2-3} = 5-2*2 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow$ 1 = 1 (vero)

x = 7/2 $\rightarrow \sqrt{2*7/2-3} = 5-2*7/2 \rightarrow \sqrt{4} = -2 \rightarrow$ 2 = -2 (falso)

Quindi la soluzione x = 2 è accettabile, mentre x = 7/2 non è accettabile.

Concludendo l'equazione data ammette una sola soluzione ed essa è **x = 2**

EQUAZIONI IRRAZIONALI CONTENENTI RADICALI CUBICI

Per risolverle occorre cercare di eliminare i radicali, elevando al cubo entrambi i membri. In questo caso non è necessaria la verifica delle soluzioni

Es. $\boxed{\sqrt[3]{x^3-6x^2+4}+2=x}$

Prima di elevare al cubo i membri, isoliamo il radicale al primo membro

$$\sqrt[3]{x^3-6x^2+4}=x-2$$

Elevando al cubo entrambi i membri, si ha:

$$\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2+4}\right)^3=(x-2)^3 \rightarrow x^3-6x^2+4=x^3-6x^2+12x-8 \rightarrow 12x=12 \rightarrow \quad \mathbf{x=1}$$

In generale, se abbiamo un'equazione del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con n $\geq$ 2

Dobbiamo distinguere i casi:

- **n dispari**

L'equazione è equivalente all'equazione $f(x) = \left[g(x)\right]^n$

e quindi si risolve elevando alla n-esima potenza entrambi i membri

- **n pari (2, 4,…)**

L'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = \left[g(x)\right]^n \end{cases}$$

La prima condizione ***f(x)* ≥ *0*** è chiamata **condizione di realtà o di esistenza in R del radicale**.(Sappiamo infatti che il radicando di una radice di indice pari deve essere ≥0, affinché la radice sia un numero reale). La seconda condizione g***(x)* ≥ *0*** è chiamata **condizione di concordanza dei segni**.(Sappiamo infatti che un radicale di indice pari $\sqrt[n]{f(x)}$ è ≥0, quindi lo deve essere anche il secondo membro dell'equazione).

Consideriamo, come esempio, lo stesso esercizio risolto prima

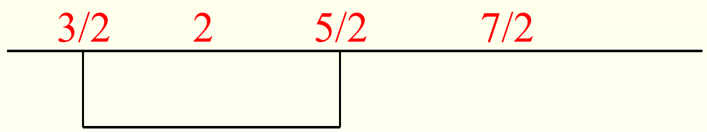
Es. $\boxed{\sqrt{2x-3} = 5-2x}$

L'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \\ 2x-3 = (5-2x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x \leq \dfrac{5}{2} \\ 2x-3 = 25-20x+4x^2 \end{cases}$$

Dalle due disequazioni ricaviamo la condizione $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2} \\ 2x^2 - 11x + 14 = 0 \rightarrow \text{x} = 2 \vee \text{x} = 7/2 \end{cases}$$



La soluzione x = 2 è accettabile, mentre x = 7/2 non è accettabile perché non rispetta la condizione $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

Concludendo l'equazione data ammette una sola soluzione ed essa è **x = 2**

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Una disequazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice è detta **irrazionale**

•

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad n \in N \; n \geq 2$$

oppure

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad n \in N \; n \geq 2$$

Distinguiamo due casi:

- n dispari
- n pari

n dispari

- Il dominio della funzione radice con n dispari coincide con tutto R; infatti $\sqrt[n]{f(x)}$

è un numero reale, sia per f(x) ≥ 0, sia per f(x) < 0

Le disequazioni date si possono risolvere elevando a n entrambi i membri e risolvendo poi le disequazioni razionali

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) < \left[g(x)\right]^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > \left[g(x)\right]^n$$

n pari

- Il dominio della funzione radice con indice pari coincide con $R^+ \cup \{0\}$

- Distinguiamo due casi:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

Consideriamo la disequazione $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ Notiamo che l'espressione $\sqrt[n]{f(x)}$ assume valori reali solo se è verificata la condizione: **f(x) ≥ 0** e inoltre che, sotto questa condizione, è $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$. Affinché possa essere verificata la disequazione proposta dovrà necessariamente essere g(x) > 0. Ma se i due membri della disequazione sono entrambi non negativi, essa equivale a quella che si ottiene elevando detti membri a potenza n-esima e cioè alla disequazione

$$f(x) < [g(x)]^n$$

Si conclude così che sono soluzioni della disequazione irrazionale proposta tutte e sole le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

La condizione f(x) ≥ 0 è detta **condizione di realtà** del radicale

la condizione g(x) > 0 è detta **condizione di concordanza dei segni.**

Consideriamo la disequazione $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ Notiamo che l'espressione $\sqrt[n]{f(x)}$

assume valori reali solo se è verificata la condizione: **f(x) ≥ 0** e
inoltre che, sotto questa condizione, è $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$.
Se è g(x) < 0 la disequazione è certamente soddisfatta;
se invece è g(x) ≥ 0 la disequazione proposta è equivalente a quella che si ottiene elevando a potenza n-esima i due membri, e cioè alla disequazione

$$f(x) > [g(x)]^n$$

Concludiamo dunque che la soluzione della disequazione irrazionale data è l'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

ESEMPIO n dispari

$$\boxed{\sqrt[3]{1+x^3} \prec x+1}$$

$1 + x^3 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$0 < 3x^2 + 3x$

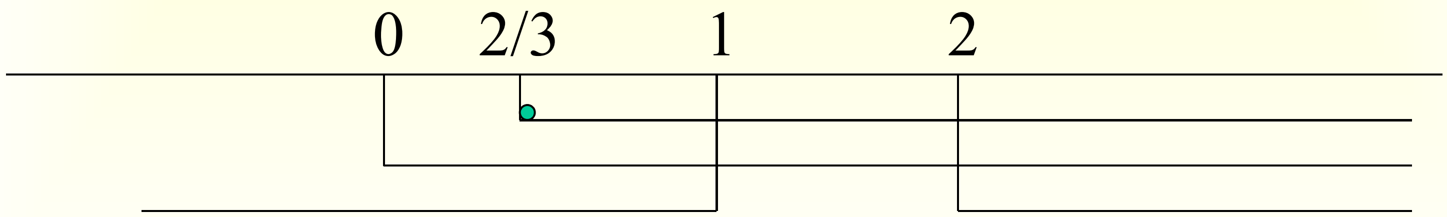
$3x^2 + 3x > 0$

$\boxed{x < -1 \ \vee\ x > 0}$

1° ESEMPIO n pari

$$\boxed{\sqrt{3x-2} < x}$$

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \rightarrow \ x \geq 2/3 \\ x > 0 \\ 3x-2 < x^2 \quad \rightarrow x^2-3x+2>0 \rightarrow x<1 \ \ x>2 \end{cases}$$



S = {x∈R: x > 2} ∪ {x∈R: 2/3 ≤ x < 1}

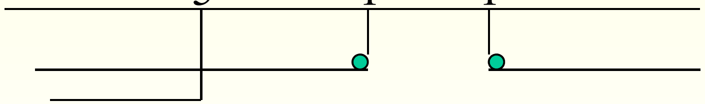
2° ESEMPIO n PARI

$$\boxed{\sqrt{x^2-1} > x+5}$$

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+5<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x^2-1 > (x+5)^2 \end{cases}$$

Primo sistema

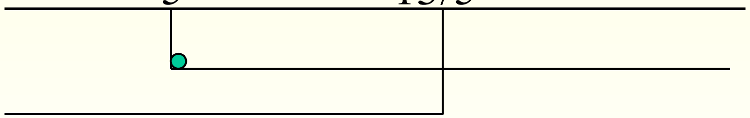
$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 & \rightarrow & x \leq -1 \quad x \geq 1 \\ x+5<0 & \rightarrow & x<-5 \end{cases}$$



$S_1 = \{x \in R\colon x < -5\}$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \ \rightarrow x \geq -5 \\ x^2-1 > (x+5)^2 \rightarrow x^2-1 > x^2+10x+25 \ \rightarrow 10x < -26 \end{cases}$$



$S_2 = \{x \in R\colon -5 \leq x < -13/5\}$

$S = S1 \cup S2 = \{x \in R\colon x < -5\} \cup \{x \in R\colon -5 \leq x < -(13/5)\}$

$$\boxed{S = \{x \in R\colon x < -(13/5)\}}$$