Numeri Immaginari
e
Numeri Complessi

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Numeri immaginari

Nell'insieme R dei numeri reali non si può estrarre la radice quadrata di un numero negativo perché non esiste nessun numero reale che elevato al quadrato dia un risultato negativo.

Per risolvere questo problema, è stato introdotto l'insieme dei numeri complessi, che si indica con il simbolo C, e di cui l'insieme R può essere considerato un sottoinsieme

Allo scopo di ampliare l'insieme dei numeri reali, viene quindi introdotto un nuovo numero detto **unità immaginaria**, indicato con il simbolo **i** e il cui quadrato è uguale a **-1**

$\boxed{i^2 = -1}$ ma è anche $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$

Vi sono perciò due numeri immaginari, i e –i, il cui quadrato è -1

quindi $\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}$

Come per i numeri reali, si pone:

$$\boxed{i \cdot 0 = 0} \qquad \boxed{i \cdot 1 = i}$$

Chiameremo **numeri immaginari** quei numeri *bi* espressi come prodotto di un numero reale b e dell'unità immaginaria i

Ad esempio, sono numeri immaginari

$$5i \qquad -3i \qquad \frac{3}{2}i \qquad \sqrt{5}i$$

Questi numeri rispettano le regole del calcolo algebrico.

Grazie ai numeri immaginari si possono estrarre le radici quadrate dei numeri reali negativi

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm i2 = \pm 2i$$

Operazioni con i numeri immaginari

La somma di due numeri immaginari è il numero immaginario avente per coefficiente la somma dei due coefficienti:

$$bi + b'i = (b + b')i$$

Esempio

$$2i + 3i = (2 + 3)i = 5i$$

La differenza di due numeri immaginari è il numero immaginario avente per coefficiente la differenza dei due coefficienti:

$$bi - b'i = (b - b')i$$

Esempio

$$5i - 8i = (5 - 8)i = -3i$$

Il prodotto di un numero reale per un numero immaginario è il numero immaginario avente per coefficiente il prodotto del numero reale per il coefficiente del numero immaginario:

$$b' \cdot (bi) = (b' \cdot b)i$$

Esempio

$$3 \cdot (5i) = (3 \cdot 5)i = 15i$$

Il prodotto di due numeri immaginari è il numero reale opposto al prodotto dei due coefficienti:

$$(bi) \cdot (b'i) = (bb')i^2 = -bb'$$

Esempio

$$(5i) \cdot (2i) = (5 \cdot 2)i^2 = -10$$

Il <u>quoziente di due numeri immaginari</u> è il numero reale quoziente dei due coefficienti:

$$\frac{bi}{b'i} = \frac{b}{b'i}$$

Esempio

$$\frac{5i}{3i} = \frac{5}{3}$$

La <u>potenza n-esima di un numero immaginario</u> è uguale al prodotto delle potenze n-esime del coefficiente e dell'unità immaginaria:

$$(bi)^n = b^n \cdot i^n$$

Esempio

$$(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3 = 8 \cdot (-i) = -8i$$

Una proprietà importantissima dell'unità immaginaria è che **le potenze di i sono cicliche di ordine 4**, ovvero ogni 4 si ripetono periodicamente. Per intenderci:

$$i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot i = i$$

..e così via..

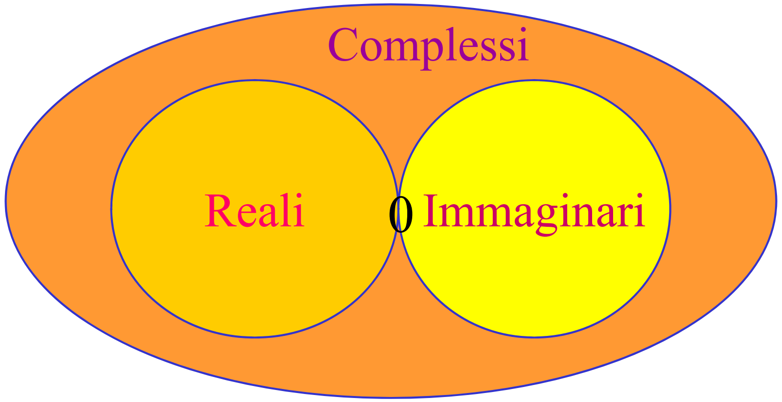
Per calcolare i^n, con $\in N \wedge n \geq 4$, dividiamo n per 4 e indichiamo con q il quoziente e con r il resto; risulterà n = 4q + r. Si otterrà:

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

$$i^{32} = i^0 = 1$$

$$i^{27} = i^3 = -i$$

Numeri complessi



Forma algebrica

Siano a e b due numeri reali. Le espressioni della forma a+ib somma di un numero reale e di un numero immaginario prendono il nome di *numeri complessi.*

Il numero a si dice parte reale del numero complesso,ib è la parte immaginaria e b è il coefficiente dell'immaginario.

Se b=0,il numero complesso a+ib coincide con il numero reale a.

Se a=0 il numero complesso a+ib coincide con il numero immaginario ib.

Due numeri complessi si dicono <u>*uguali*</u> quando hanno rispettivamente uguali le parti reali e i coefficienti dell'immaginario.

Se due numeri complessi non sono uguali, essi sono disuguali , ma non è possibile stabilire tra loro una relazione di *maggiore o minore. Nell'insieme C non è possibile alcun ordinamento*

Due numeri complessi che hanno la stessa parte reale ed opposti i coefficienti dell'immaginario si dicono <u>*complessi coniugati*</u>.

$a + ib$ $\quad$ $a - ib$ $\qquad$ $2 + 5i$ $\quad$ $2 - 5i$

Due numeri complessi si dicono <u>*opposti*</u> quando sono opposte sia la parte reale sia quella immaginaria.

$a + ib$ $\quad$ $-a - ib$ $\qquad$ $2 + 5i$ $\quad$ $-2 - 5i$

Operazioni con i numeri complessi

- Somma
- Differenza
- Prodotto
- Reciproco
- Quoziente
- Potenza

La *somma di due o più numeri complessi* si definisce come il numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali degli addendi e per coefficiente della parte immaginaria la somma dei coefficienti delle parti immaginarie:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

Esempio $(2+i3)+(7-i7)=(2+7)+(3-7)i = 9-4i$

Per *differenza di due numeri complessi* si intende la somma del primo con l'opposto del secondo:

$$(a+ib)-(c+id)=(a+ib)+(-c-id)=(a-c)+i(b-d)$$

Esempio $(8-i4)-(4+i2)=(8-i4)+(-4-i2)=4-i6$

La differenza di due numeri complessi coniugati è un numero immaginario.

Esempio $(2+i3)-(2-i3)=i6$

Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che si ottiene moltiplicando termine a termine i due fattori mediante la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Esempio $$(2-i5)\cdot(-1+i2) = (-2+10) + i(4+5) = 8+i9$$

In particolare il prodotto di due numeri complessi coniugati è un numero reale:

$$(a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - i^2 b = a^2 + b^2$$

Esempio $$(3+i4)\cdot(3-i4) = 9 - i^2 16 = 9+16 = 25$$

Si chiama <u>*reciproco*</u> del numero complesso *c+id* il numero:

$$\frac{1}{c+id}$$

moltiplicando numeratore e denominatore di questa frazione per il coniugato di *c+id*,cioè *c-id*,si ha:

$$\boxed{\frac{1}{c+id}} = \frac{c-id}{(c+id)(c-id)} = \boxed{\frac{c-id}{c^2+d^2}}$$

Si può così affermare che il <u>*reciproco*</u> del numero complesso *c+id* è:

$$\boxed{\frac{c-id}{c^2+d^2}}$$

Esempio

$$\frac{1}{2+i3} = \frac{(2-i3)}{(2+i3)(2-i3)} = \frac{2-i3}{4-9i^2} = \frac{2-i3}{4+9} = \frac{2-i3}{13}$$

Per *quoziente* di due numeri complessi si intende il prodotto del primo per il reciproco del secondo:

$$\frac{a+ib}{c+id} = (a+ib)\cdot\frac{1}{c+id}$$

Esempio

$$\frac{2+i5}{3-i} = (2+i5)\cdot\frac{1}{3-i} = (2+i5)\cdot\frac{3+i}{9-i^2} =$$

$$= \frac{(2+i5)(3+i)}{9+1} = \frac{(6-5)+i(15+2)}{10} = \frac{1+i17}{10} = \frac{1}{10}+i\frac{17}{10}$$

La potenza di un numero complesso viene calcolata mediante le stesse regole che permettono di determinare le potenze dei binomi:

$$(a+ib)^2 = a^2 + 2abi + i^2b^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

Esempio

$$(3-i2)^2 = (9-4) - 12i = 5 - 12i$$

Risoluzione di equazioni di secondo grado nell'insieme dei numeri complessi

I numeri complessi si incontrano nella risoluzione di equazioni algebriche;in particolare i numeri complessi coniugati si presentano come soluzioni di un'equazione algebrica di secondo grado a coefficienti reali, avente il discriminante negativo.

Nella formula risolutiva di un'equazione di secondo grado quando il delta sotto radice risultava negativo, non esistendo nel campo reale la radice quadrata di un numero negativo, non era possibile trovare la soluzione.

Nel campo dei numeri complessi come sappiamo esiste sempre la radice di un numero negativo, per cui un'equazione di secondo grado risulta sempre risolvibile in C.

Esempio

Data l'equazione: $x^2+x+1=0$,essa non ha radici reali

essendo Δ = 1-4 = -3 < 0.

Applicando la formula risolutiva si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Come si può osservare le due soluzioni sono due numeri complessi coniugati.

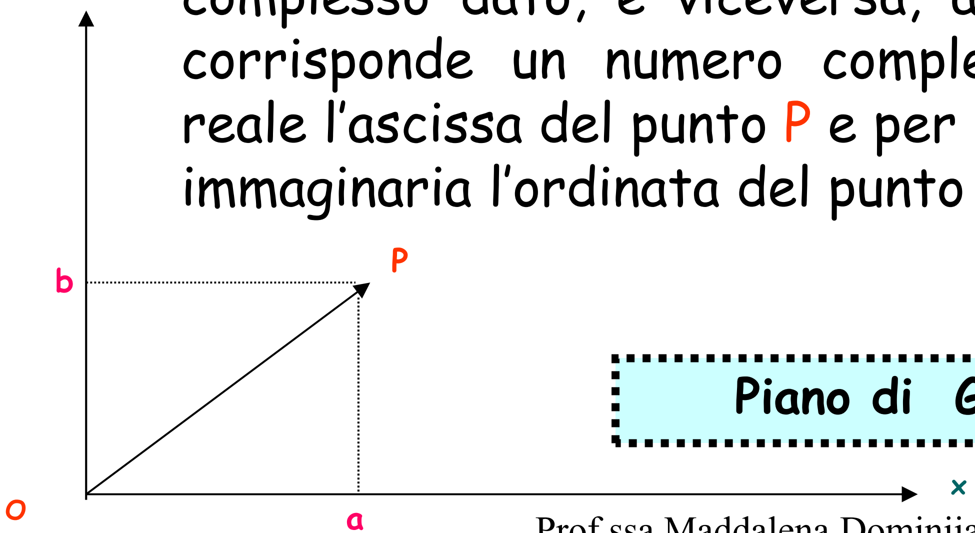
Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Così come i numeri reali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, i numeri complessi si possono porre in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano.

Fissiamo sul piano un sistema di assi cartesiani di origine O .

Il numero complesso a+ib è caratterizzato dalla coppia di numeri reali (a;b). Sia P il punto del piano di ascissa a e di ordinata b, conveniamo di rappresentare il numero complesso con il punto P.

Il punto P costituisce l'immagine geometrica del numero complesso dato, e viceversa, ad ogni punto del piano corrisponde un numero complesso avente per parte reale l'ascissa del punto P e per coefficiente della parte immaginaria l'ordinata del punto P.



Piano di Gauss

In tal modo resta stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano e le coppie di numeri reali cioè tra i punti P del piano e i numeri complessi.

Se b=0 il numero complesso si riduce ad a che è reale e il punto P viene a trovarsi sull'asse x ,che si dice perciò *asse reale*.
Se a=0 si ha il numero immaginario e il punto P viene a trovarsi sull'asse y, che si chiama asse immaginario.
L'origine O è l'immagine dello zero complesso

Il piano considerato come luogo dei punti immagini geometriche dei numeri complessi si dice *piano di Gauss* .

In tale piano: due numeri complessi coniugati hanno per rispettive immagini due punti simmetrici rispetto all'asse reale (asse x);

due numeri opposti invece sono rappresentati da punti simmetrici rispetto all'origine O degli assi.

Vettori e numeri complessi

Al numero complesso $a+ib$ possiamo associare il punto P del *piano di Gauss* di coordinate (a,b), ma il punto P individua il vettore OP, quindi possiamo dire che al numero complesso $a+ib$ corrisponde il vettore avente a come sua componente secondo l'asse x e b come componente secondo l'asse y .

Viceversa,in un piano 0xy ,ogni vettore può rappresentarsi con un numero complesso avente per parte reale e per coefficiente dell'immaginario le componenti del vettore rispettivamente secondo l'asse x e l'asse y .

Esiste quindi una *corrispondenza biunivoca* tra i numeri complessi e i vettori del piano.