FUNZIONI GONIOMETRICHE

Misura degli angoli

Seno, coseno e tangente di un angolo

Relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche

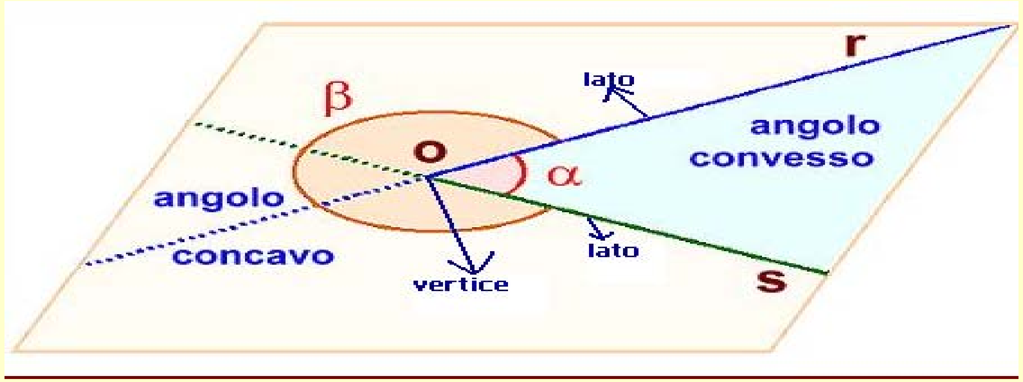
Angoli notevoli

Grafici delle funzioni goniometriche

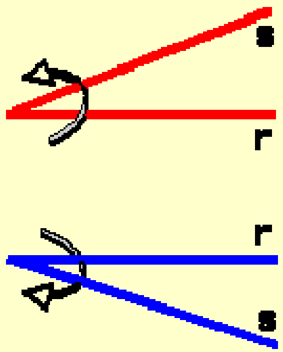
Prof.ssa Maddalena Dominijanni

GONIOMETRIA : scienza della misura degli angoli

Un **angolo** è ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine.



Un **angolo** si può anche considerare generato dalla rotazione, in un piano, di una delle due semirette intorno all'origine O fino a sovrapporsi all'altra semiretta: è quindi necessario indicare quale delle due semirette è il primo lato e fissare il verso di rotazione.

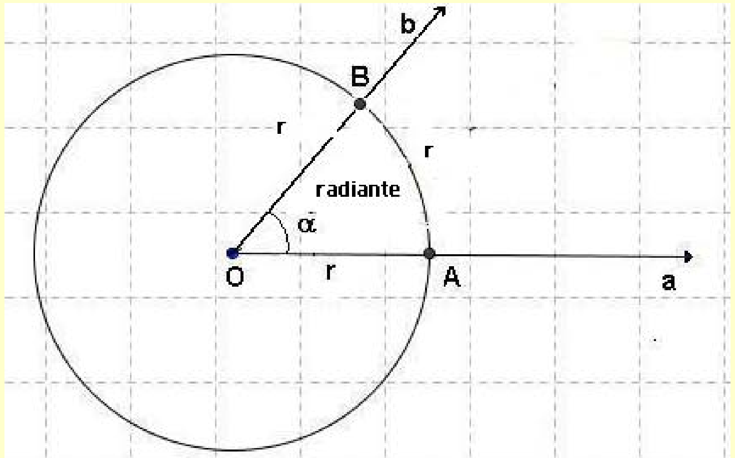


Misura degli angoli in gradi e radianti

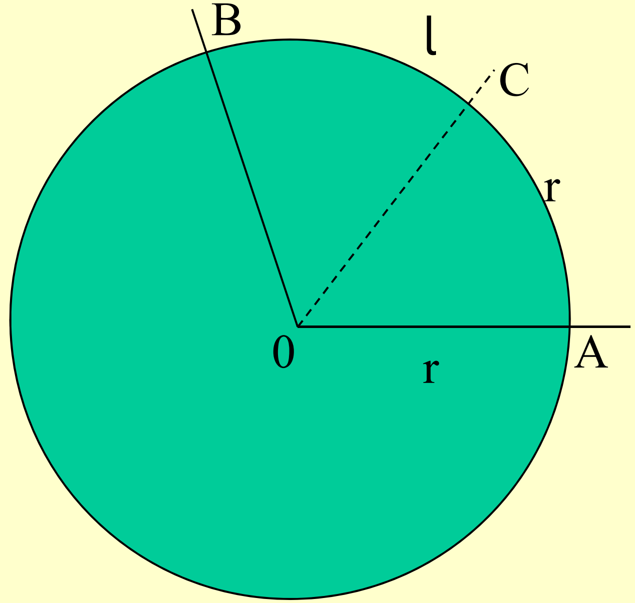
In goniometria i sistemi di misura prevalentemente usati per misurare le ampiezze degli angoli sono:

- Il sistema ***sessagesimale***: ha come unità di misura il **grado**, che è la 360-esima parte di un angolo giro. Il grado è diviso a sua volta in 60 primi (1°=60'). Il primo è diviso in 60 secondi (1'=60'').

- Il sistema **circolare**: ha come unità di misura il **radiante**, che è l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.
L'ampiezza dell'angolo così ottenuto non dipende dalla circonferenza scelta né dal suo raggio.



La misura in radianti di un angolo è il rapporto tra l'ampiezza dell'angolo e quella del radiante.



Dato un angolo $A\hat{O}B$, la sua ampiezza in radianti è il rapporto tra $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$

$$\rho = \frac{A\hat{O}B}{A\hat{O}C}$$

Poiché in una circonferenza gli angoli al centro sono proporzionali agli archi che sottendono, detta l la lunghezza dell'arco AB, ed r quella dell'arco AC, si ha:

$$\rho = \frac{\ell}{r}$$

L'angolo giro intercetta l'intera circonferenza, cioè si ha $l = 2\pi r$.
Quindi l'ampiezza in radianti dell'angolo giro è

$$\text{angolo giro in radianti} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi.$$

Pertanto l'ampiezza dell'angolo giro può essere indicata indifferentemente da 360° o da 2π rad. Analogamente 180° = π rad

90° = $\frac{\pi}{2}$ Per l'angolo di 1°si avrà $\frac{\pi}{180} rad$

Da gradi a radianti e viceversa

Se indichiamo con α la misura in gradi di un angolo e con ρ la sua misura in radianti si ha:

$$\alpha : 180° = \rho : \pi$$

$$\rho = \alpha \frac{\pi}{180} \qquad \alpha = \frac{180}{\pi} \rho$$

La seguente tabella riporta le misure in gradi e le corrispondenti misure in radianti di alcuni angoli notevoli

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Radianti	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	π	3π/2	2π

Circonferenza goniometrica

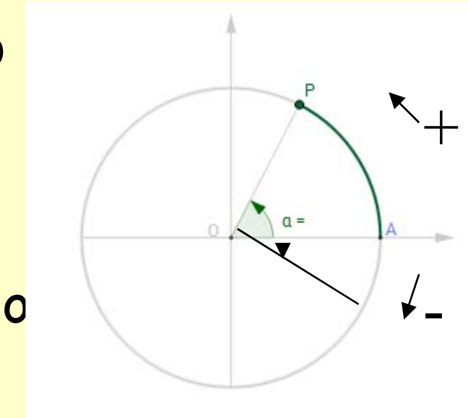
Nel piano cartesiano si dice **circonferenza goniometrica** una circonferenza che ha il centro nell'origine degli assi cartesiani e il raggio uguale a 1, ovvero la circonferenza che ha equazione $x^2 + y^2 = 1$

Quando si utilizza la circonferenza goniometrica possiamo rappresentare **angoli orientati** assumendo che il punto A sia l'**origine degli archi**, e che il lato OA sia l'**origine degli angoli**.

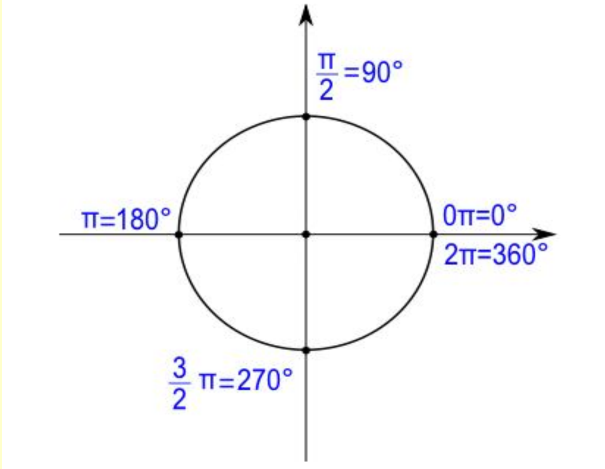
OA = OP = 1

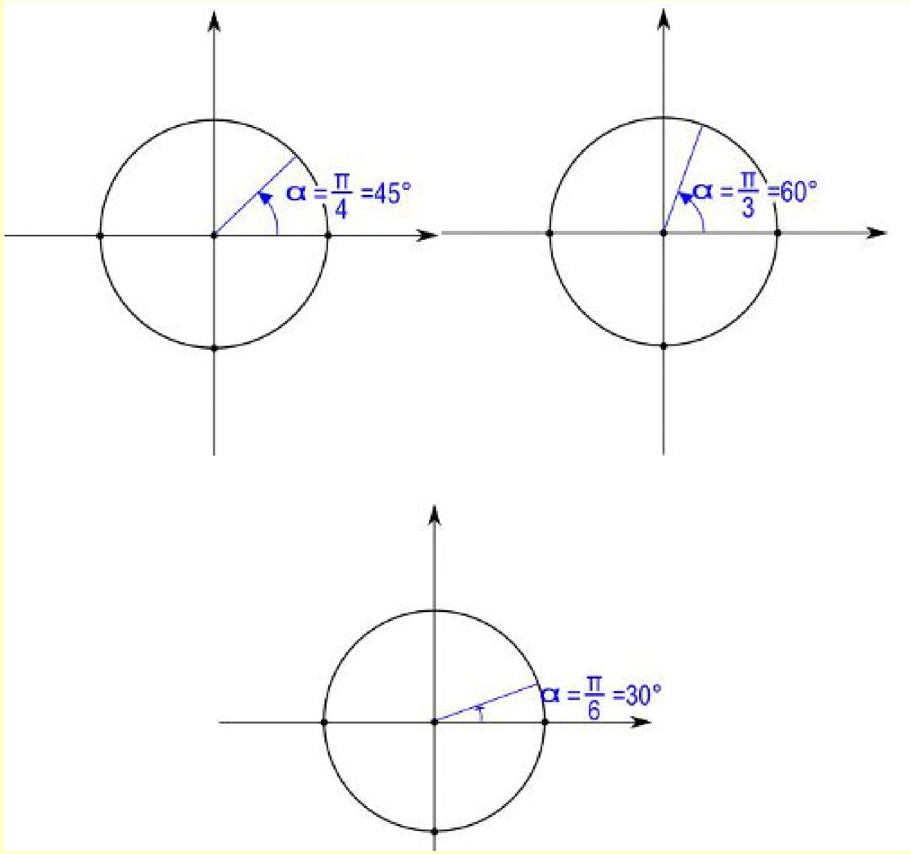
Si considera positivo il **verso di rotazione** antiorario

I punto **P**, intersezione del secondo lato con la circonferenza, si chiama **punto associato** all'angolo α



Nella figura a destra sono riportati i punti associati ai multipli di un angolo retto compresi tra 0° e 360° (0 e 2π)



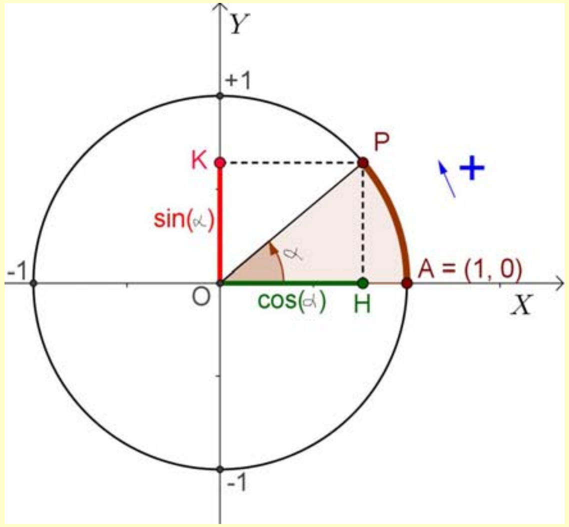


Nella figura a sinistra sono rappresentati angoli diversi

R.B. La corrispondenza che si stabilisce tra *angoli orientati* e *punti associati* sulla circonferenza **non** è biunivoca. Infatti ad ogni angolo è associato un solo punto, ma ogni punto della circonferenza è associato a infiniti angoli. (es. 45°, 405°, -315°)

$\beta = \alpha + 2k\pi$ opp. $\beta = \alpha + k\,360$

Seno e coseno di un angolo



Il **seno** di un angolo α è **l'ordinata** del punto associato ad a nella circonferenza goniometrica

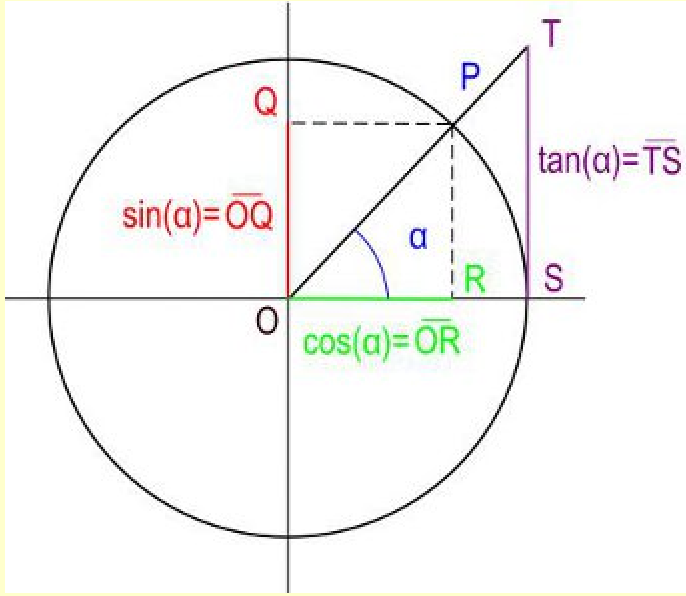
Il **coseno** di un angolo α è **l'ascissa** del punto associato ad a nella circonferenza goniometrica

Se $\alpha = 0°$,	P(1;0) quindi:	$\cos 0° = 1$	$\text{sen } 0° = 0$
Se $\alpha = 90°$,	P(0;1) quindi:	$\cos 90° = 0$	$\text{sen } 90° = 1$
Se $\alpha = 180°$,	P(-1;0) quindi:	$\cos 180° = -1$	$\text{sen } 180° = 0$
Se $\alpha = 270°$,	P(0;-1) quindi:	$\cos 270° = 0$	$\text{sen } 270° = -1$
Se $\alpha = 360°$,	P(1;0) quindi:	$\cos 360° = 1$	$\text{sen } 360° = 0$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche con periodo uguale a 360° (o 2π radianti) $\quad \text{sen}(\alpha + k360) = \text{sen } \alpha$, con $k \in Z$

Tangente di un angolo

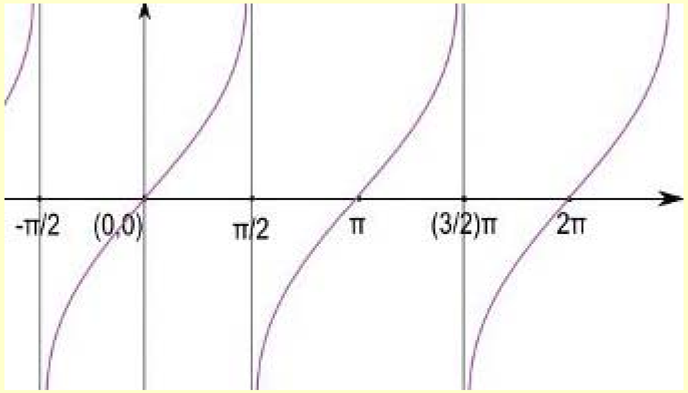
La tangente di un angolo orientato è l'ordinata del punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto (1;0).



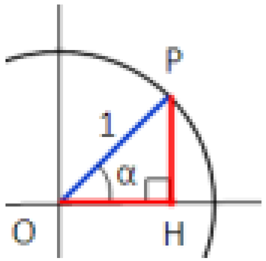
Se il secondo lato dell'angolo α è sull'asse y, tale lato risulta parallelo alla retta t e quindi non la interseca.

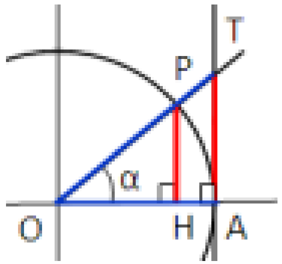
Perciò se $\alpha = \pm 90° + k\, 360°$ non è definito alcun valore di tan α, mentre $\tan 0° = 0$ e $\tan 180° = 0$

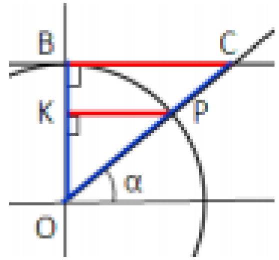
Il grafico della funzione coseno



Relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche





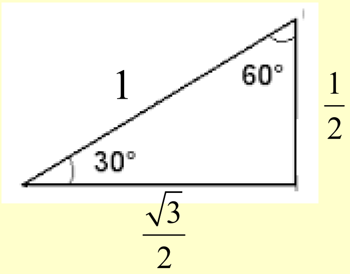


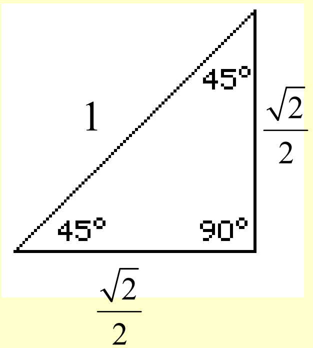
$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$ctg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sen\alpha}$

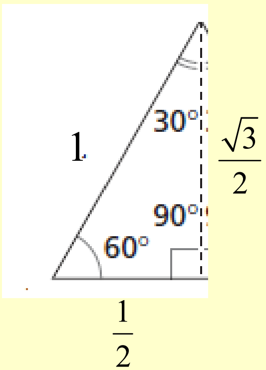
$sen\alpha$ in funzione di …	$cos\alpha$ in funzione di …
$sen\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$	$cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$
$sen\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$	$cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$
$sen\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}$	$cos\alpha = \pm\dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}$

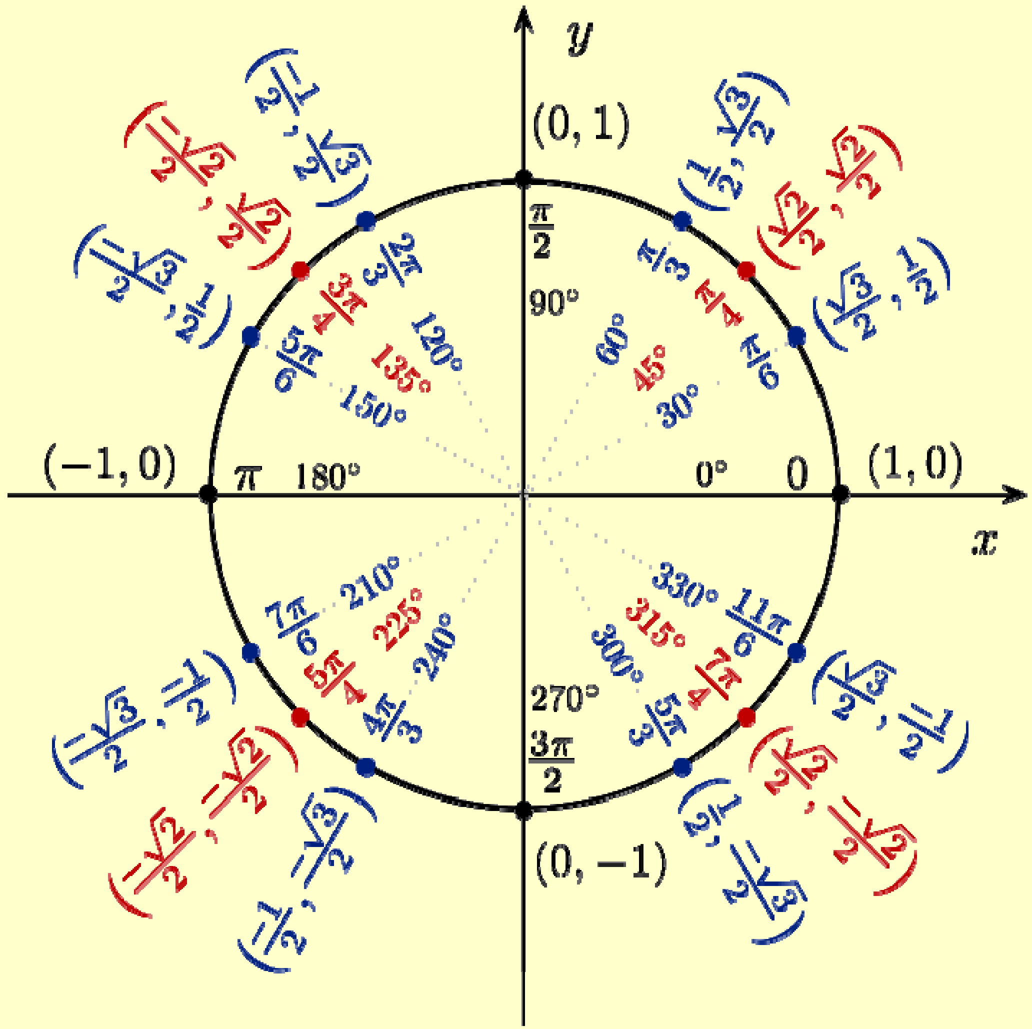
$tg\alpha$ in funzione di …	$ctg\alpha$ in funzione di …
$tg\alpha = \pm\dfrac{sen\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\alpha}}$	$ctg\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{1 - sen^2\alpha}}{sen\alpha}$
$tg\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{cos\alpha}$	$ctg\alpha = \pm\dfrac{cos\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$
$tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$

Seno e coseno di angoli a partire da 30° - 45° - 60°

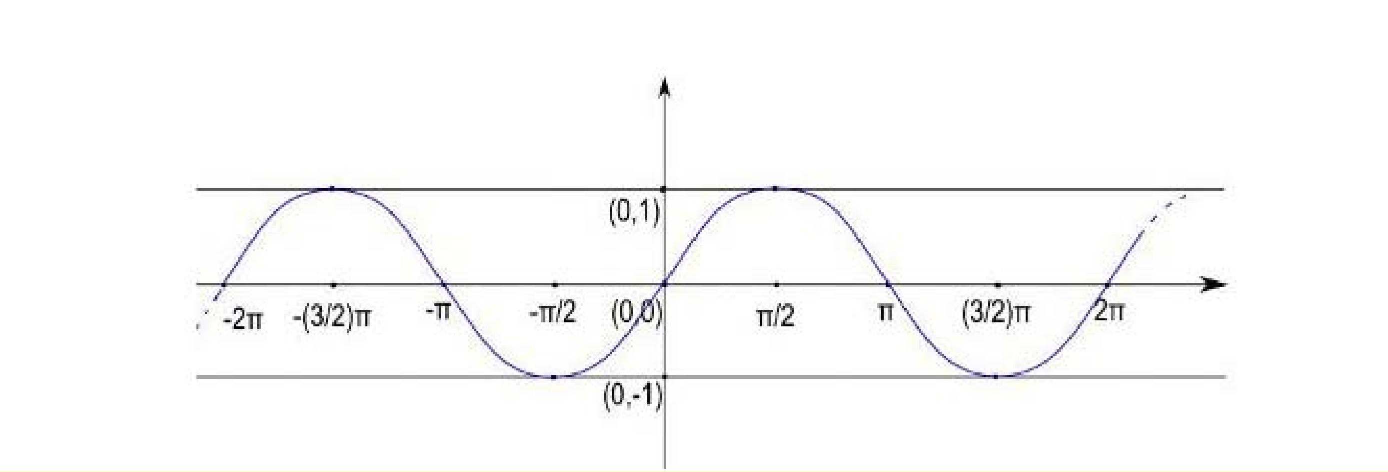








Il grafico della funzione seno



Il grafico della funzione coseno