MATRICI
e
DETERMINANTI

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Le matrici non sono altro che tabelle di elementi ordinati per righe e colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se m = n la matrice si dice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice quadrata di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice rettangolare di tipo 2 · 3

Due matrici dello stesso tipo sono uguali se hanno uguali tutti gli elementi corrispondenti

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A = B

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

La matrice opposta di A, che viene indicata con il simbolo $-A$, è la matrice, dello stesso tipo di A, i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -3 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice trasposta di A, che viene indicata con il simbolo A^t, si ottiene scambiando le righe con le colonne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In una matrice quadrata gli elementi che hanno i due indici uguali si dicono appartenere alla diagonale principale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

DIAGONALE PRINCIPALE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

DIAGONALE SECONDARIA

Una matrice quadrata i cui elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli si chiama matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono tutti 1 si chiama matrice unità o matrice identica

Una matrice quadrata i cui elementi al di sotto (sopra) della diagonale principale sono nulli si chiama matrice triangolare superiore (inferiore)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Diagonale principale

Elementi SOTTO la diagonale principale uguali a zero

Matrice triangolare superiore

Elementi SOPRA la diagonale principale uguali a zero

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonale principale

Matrice triangolare inferiore

ALGEBRA DELLE MATRICI

La somma di due matrici dello stesso tipo è una matrice i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici dati.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+0 \\ 2+8 & 7+3 \\ 1+10 & 8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 10 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

La **SOMMA di MATRICI** gode delle seguenti **PROPRIETÀ**:
la **PROPRIETÀ COMMUTATIVA**;
la **PROPRIETÀ ASSOCIATIVA**.

La differenza di due matrici dello stesso tipo è una matrice i cui elementi sono la differenza dei corrispondenti elementi delle matrici dati.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-1 & 5-0 \\ 2-8 & 7-3 \\ 1-10 & 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 4 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Si chiama prodotto della matrice A per uno scalare a (a numero reale)

La matrice che si ottiene da A moltiplicando tutti i suoi elementi per a.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-8) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 15 & -24 & 9 \\ 6 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

Si chiama prodotto scalare di una matrice riga A (1,s) per una matrice colonna B (s,1) la matrice P di tipo (1,1) che ha per elemento il numero che si ottiene sommando i prodotti del tipo $a_{1j}\, b_{j1}$

A (1 2 4)

$$B \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A · B = [1 · 3 + 2 · 5 + 4 · 2] = 21

Prodotto righe per colonne

Supponiamo di avere la MATRICE *A* di ordine *(m x s)*
e la MATRICE *B* di ordine *(s x n)*,
si definisce prodotto la matrice P di ordine (m x n) il cui generico elemento p_{ij}
è dato dalla SOMMA dei PRODOTTI degli elementi della RIGA I-ESIMA della matrice *A* per i corrispondenti elementi della COLONNA J-ESIMAdella matrice *B*.

Affinché il prodotto tra le due matrici POSSA ESSERE ESEGUITO è necessario che il <u>numero delle colonne</u> della prima matrice sia <u>uguale</u> al <u>numero delle righe</u> della seconda matrice.

Il prodotto tra matrici <u>non gode della proprietà commutativa</u> e <u>non vale</u> per esso <u>la legge di annullamento del prodotto</u>

Determinanti di matrici quadrate

A una matrice quadrata può essere associato un valore numerico, detto determinante. Alle matrici rettangolari non viene associato alcun valore numerico.

Nel caso particolare della matrice di ordine 1, cioè $A = [a_{11}]$ si ha

$\det A = |A| = |a_{11}| = \mathbf{a_{11}}$

N.B. non confondere il simbolo di determinante con quello di modulo

Es. $A = [-4]$ **è** $|-4| = \mathbf{-4}$

Nel caso di matrici di ordine 2, il determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale diminuito del prodotto degli elementi della diagonale secondaria

Es. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ $\det A = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -3 - 10 = -13.$

Consideriamo una matrice *A* quadrata, si dice minore complementare di un suo elemento *aij*, il determinante della sottomatrice che si ottiene da *A* eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima.

Es. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Consideriamo l'elemento a_{31} $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Eliminiamo la terza riga e la prima colonna $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Il minore complemetare è $$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$$ **(2 x 1) – (7 x 0) = 2**

Si dice complemento algebrico di un elemento *aij*, il minore complementare di *aij*, ilpreceduto dal segno + o dal segno -, a seconda che, rispettivamente, (i + j) sia pari o dispari.

Es. $$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$$ **2**

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$ **21**

Il compl. algebrico è 2

Il compl. algebrico è - 21

Determinanti di ordine n

Il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

Consideriamo la matrice A del terzo ordine

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo secondo la prima riga

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Un secondo metodo per calcolare il determinante di una matrice del terzo ordine è indicato dalla Regola di Sarrus. Per la sua applicazione è conveniente disporre, accanto alla matrice data, copia delle prime due colonne ed eseguire i prodotti indicati, presi in segno positivo seguendo le frecce rosse e negativi seguendo le frecce blu.

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

Proprietà dei determinanti

Vediamo le principali:

Se tutti gli elementi di una riga (di una colonna) sono nulli allora il determinante vale zero

Scambiando fra loro due righe (due colonne) il determinante cambia di segno

Se in un determinante due righe (due colonne) sono proporzionali il determinante vale zero

Se moltiplico ogni elemento di una riga (colonna) per un numero reale k allora il valore del determinante viene moltiplicato per k

Se gli elementi di una riga (colonna) sono somma di due addendi allora il determinante è uguale alla somma dei determinanti che hanno nella riga (colonna) come elementi il primo addendo ed il secondo addendo

Il valore del determinante non cambia se sommo (sottraggo) ad una riga (colonna) una qualunque riga (colonna) parallela moltiplicata per un numero reale k

Il determinante di una matrice quadrata e della sua trasposta hanno lo stesso valore

Definiamo Rango o Caratteristica di una matrice l'ordine del determinante più alto estraibile che sia diverso da zero

Consideriamo la matrice A. Vediamo che il determinante di ordine 3 è uguale a zero, perché A ha due righe uguali, mentre esiste un determinante di ordine 2 diverso da zero: prendo il minore indicato in blu

$$A \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2$$

quindi il rango della matrice e' **2** perché il determinante più grande diverso da zero è **2x2**

R.B. Un sistema e' impossibile se il rango della matrice completa e' diverso dal rango della matrice incompleta

Prof.ssa Maddalena Dominijanni