L'algebra dei Limiti

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

OPERAZIONI SUI LIMITI

1) Il limite della somma (o differenza) di funzioni è uguale alla somma (o differenza) dei loro limiti se questi sono finiti.

Se $\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1$ **e** $\lim_{x\to c} f_2(x) = l_2$ **allora**

$$\boxed{\lim_{x\to c} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = l_1 \pm l_2}$$

Possiamo estendere tale risultato al caso di limiti infiniti, ricordando che:

$$\boxed{+\infty + \infty = +\infty} \qquad \boxed{-\infty - \infty = -\infty} \qquad \boxed{l \pm \infty = \pm\infty}$$

$\boxed{+\infty - \infty}$ è una forma indeterminata e il limite può essere finito, infinito o non esistere

1) <u>Il limite del prodotto</u> di funzioni è uguale al prodotto dei loro limiti se questi sono finiti.

Se $\lim_{x \to c} f_1(x) = l_1$ **e** $\lim_{x \to c} f_2(x) = l_2$ **allora**

$$\boxed{\lim_{x \to c} \left(f_1(x) \cdot f_2(x) \right) = l_1 \cdot l_2}$$

Possiamo estendere tale risultato al caso di limiti infiniti, ricordando che:

$\boxed{l \cdot \infty = \infty}$ $\boxed{\infty \cdot \infty = \infty}$ **Per i segni vale la regola dei segni**

$\boxed{0 \cdot \infty}$ è una <u>forma indeterminata</u> e il limite può essere finito, infinito o non esistere

1) Il limite del quoziente di funzioni è uguale al quoziente dei loro limiti se questi sono finiti.

Se $\lim_{x \to c} f_1(x) = l_1$ **e** $\lim_{x \to c} f_2(x) = l_2$ **allora**

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}} = \boxed{\frac{l_1}{l_2}}$$

Possiamo estendere tale risultato al caso in cui uno dei due limiti sia zero e/o l'altro infinito, ricordando che:

$\boxed{K/0 = \infty \quad (k \neq 0)}$ $\boxed{k/\infty = 0 \quad (k \neq \infty)}$ $\boxed{\infty/l = \infty \quad (l \neq \infty)}$

$\boxed{\dfrac{0}{0}}$ **e** $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ sono forme indeterminate

R.B.

FORME INDETERMINATE

$+\infty-\infty$ $\quad \dfrac{0}{0} \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad 0\cdot\infty \quad 0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty$

FORME NON INDETERMINATE

a reale qualsiasi

$\dfrac{\infty}{0}=\infty \quad \dfrac{a}{0}=\infty \quad \dfrac{\infty}{a}=\infty \quad \dfrac{0}{\infty}=0 \quad \dfrac{a}{\infty}=0 \quad \dfrac{0}{a}=0$

$a\cdot\infty=\infty \quad \infty\cdot\infty=\infty \quad +\infty^{+\infty}=+\infty \quad +\infty^{-\infty}=0$

$+\infty+\infty=+\infty \quad -\infty-\infty=-\infty \quad a\pm\infty=\pm\infty$

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

LIMITI DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Funzioni razionali intere

a) Il limite per x→c (c finito) di una funzione razionale intera coincide con il valore assunto dalla funzione nel punto c, perché le funzioni razionali intere sono continue su R.

Es. $\lim_{x\to -1} (x^3 + x^2 + - 3x - 3) = 0$

b) Il limite per x→ ∞ di una funzione razionale intera coincide con il limite del suo termine di grado massimo.

$$\lim_{x\to+\infty} A_n(x) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n = \begin{cases} +\infty : a_0 > 0 \\ -\infty : a_0 < 0 \end{cases} \forall n\,(pari, dispari)$$

$$\lim_{x\to-\infty} A_n(x) = \lim_{x\to-\infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \lim_{x\to-\infty} a_0x^n = \begin{cases} n\,(pari) \begin{cases} +\infty : a_0 > 0 \\ -\infty : a_0 > 0 \end{cases} \\ n\,(dispari) \begin{cases} -\infty : a_0 > 0 \\ +\infty : a_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

LIMITI DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Funzioni razionali fratte

A) Lim per x → c (c finito) di $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

a) Se Q(c) ≠0 → $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ **(essendo f(x) continua per x = c)**

b) Se Q(c) = 0 ∧ P(c) ≠ 0 → $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

c) Se Q(c) = 0 ∧ P(c) = 0 → **Occorre scomporre numeratore e denominatore e dopo la semplificazione calcolare il limite**

B) Il limite per x→ ∞ di $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + \ldots + a_n}{b_0 x^m + \ldots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, n = m \\ \pm\infty, n > m \\ 0, n < m \end{cases}$$