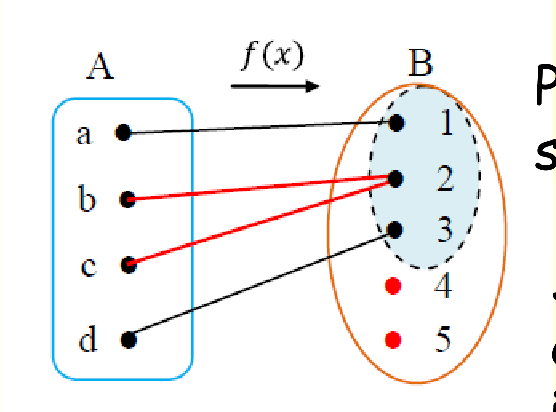
Funzioni: definizioni e tipi

Prof.ssa Maddalena Dominijanni

Definizione di funzione

Dati due insiemi non vuoti *A* e B, si dice ***funzione*** *o* ***applicazione*** da *A* a B una relazione che associa **ad ogni** elemento dell'insieme *A* **uno ed un solo** elemento dell'insieme B.



Per indicare che *f* è una funzione tra *A* e B si scrive: $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ (e si legge "effe, funzione da A a B)

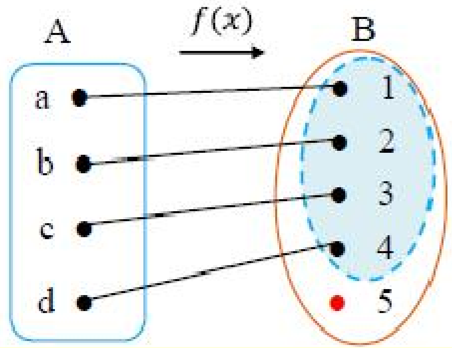
Se x è un generico elemento di *A*, il suo corrispondente y di B si indica con *f(x)* e si chiama ***immagine*** di x:

$$y = f(x)$$ (e si legge "effe di x)

• l'insieme ***A*** viene chiamato **dominio** o **insieme di definizione** o **insieme di esistenza** o **campo di esistenza.**

• il sottoinsieme di **B,** formato dalle immagini di tutti gli elementi del dominio, si chiama **codominio** della funzione e si indica con f(*A*). In generale è $f(A) \subseteq B$.

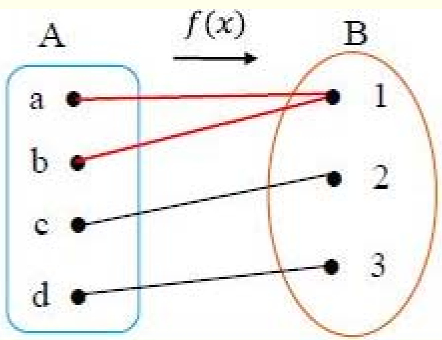
Tipi di funzione: iniettiva, suriettiva



Una funzione si dice **iniettiva** quando ad elementi distinti dell'insieme A corrispondono elementi distinti dell'insieme B

- f(x) iniettiva $\leftrightarrow x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

La funzione della figura a sinistra è iniettiva ma non suriettiva.
L'insieme A è il **dominio**, il sottoinsieme di B contenente gli elementi {1,2,3,4} associati ad elementi di A, rappresenta il **codominio** di f(x)

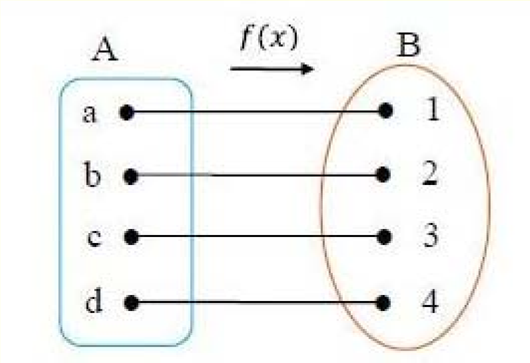


Una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A

- f(x) suriettiva $\leftrightarrow \quad \forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y$

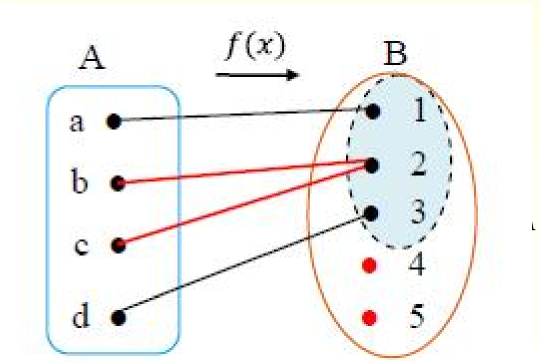
La funzione della figura a sinistra è suriettiva ma non iniettiva
L'insieme A è il **dominio**, l'insieme B è il **codominio** di fx).

Tipi di funzione: biunivoca o biiettiva, non iniettiva e non suriettiva



Una funzione si dice **biunivoca** (o biiettiva) quando è sia iniettiva che suriettiva, cioè quando ad ogni elemento dell'insieme A corrisponde uno ed un solo elemento dell'insieme B e **viceversa**
• f(x) biunivoca $\leftrightarrow \ \forall x \in A \quad \exists! y \in B : f(x) = y$ e viceversa

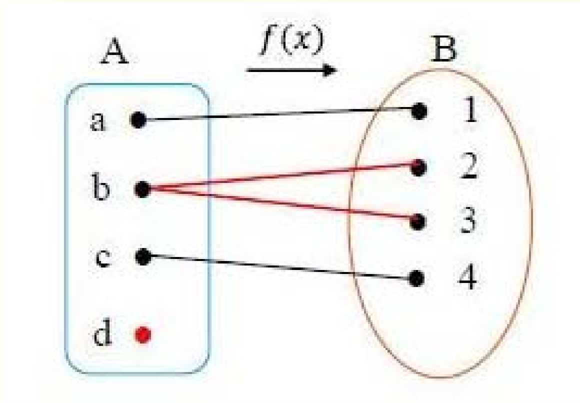
La funzione della figura a sinistra è biunivoca
L'insieme A è il **dominio**, l'insieme B è il **codominio** di f(x)



La funzione della figura a sinistra:
• NON è iniettiva perché gli elementi distinti "b, c" dell'insieme A hanno la stessa immagine "2".
• NON è suriettiva perché non tutti gli elementi dell'insieme B ("4, 5") sono immagine di un elemento dell'insieme A

L'insieme A è il **dominio**, il sottoinsieme di B contenente gli elementi {1,2,3} associati ad elementi di A, rappresenta il **codominio** di f(x).

Corrispondenza



La legge rappresentata nella figura a sinistra **non è una funzione** perché non ne soddisfa la definizione, infatti:

• all'elemento "b" dell'insieme A sono associati più elementi ("2, 3") dell'insieme B.

• l'elemento "d" dell'insieme A non è associato ad alcun elemento dell'insieme B.

La legge non è una funzione ma prende il nome di **corrispondenza**

Funzioni numeriche

Nel caso in cui gli insiemi A e B siano insiemi di numeri, la funzione si chiama **funzione numerica** e gli elementi di A e B vengono chiamati **variabili.**

Una generica funzione numerica si indica con

y = f(x) (forma esplicita) o con

F(x;y) = 0 (forma implicita)

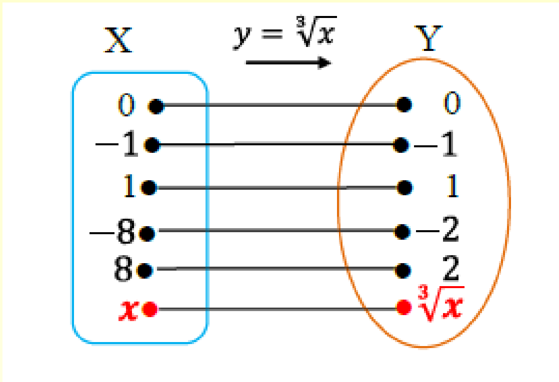
- x è detta *variabile indipendente* ed appartiene al dominio
- y è detta *variabile dipendente* ed appartiene al codominio

se x ed y sono *numeri reali* la funzione si dice **funzione reale** di una variabile reale.

In tutte le funzioni reali, ad ogni coppia di numeri associati corrisponde un punto nel piano cartesiano.
L'insieme di tali punti genera una curva che prende il nome di **grafico** della funzione.

Grafico di una funzione reale

Consideriamo come esempio la funzione: $y = \sqrt[3]{x}$



rappresentazione insiemistica

La funzione è biunivoca

x	$\sqrt[3]{x}$
0	0
-1	-1
1	1
-8	-2
8	2

coppie di numeri associati

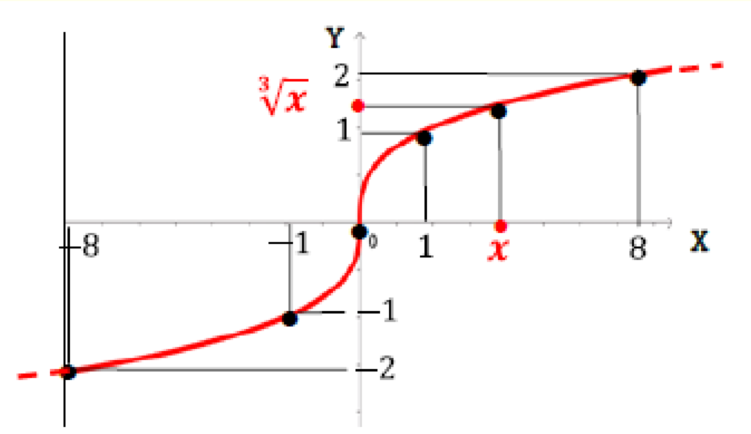
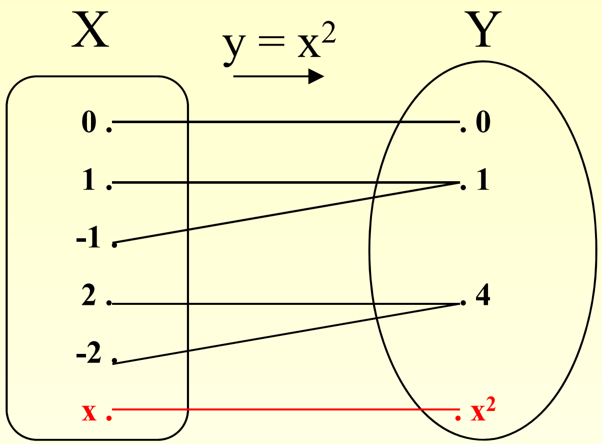


grafico della funzione

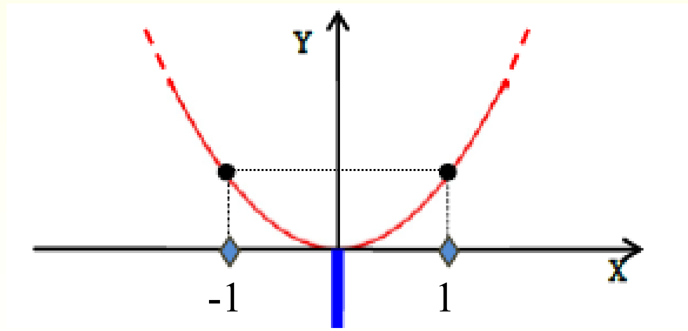
Grafico di una funzione reale

Consideriamo come esempio la funzione: $\mathbf{y = x^2}$



La funzione non è biunivoca

x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

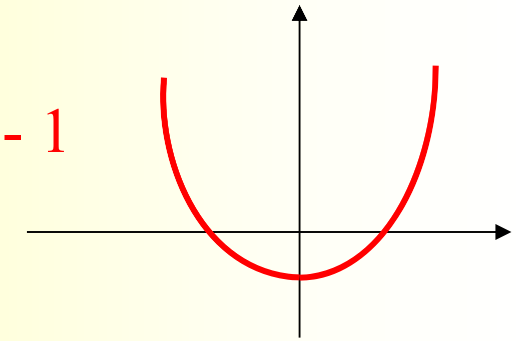


Grafici delle funzioni con moduli: $y = |f(x)|$

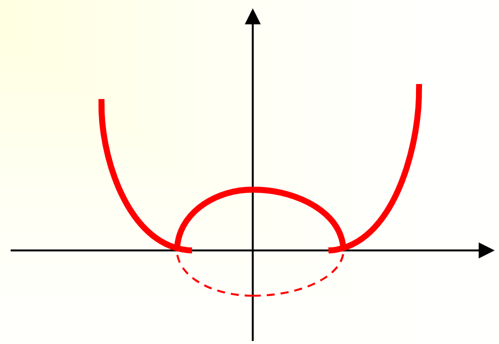
Quando una funzione è contenuta in un modulo per disegnarla basta disegnare la funzione senza modulo poi riportare sopra l'asse delle x la parte che si trova sotto l'asse.

Per esempio consideriamo la funzione $y = | x^2 - 1 |$

Prima disegniamo il grafico della funzione $y = x^2 - 1$



Poi rovesciamo la parte che si trova sotto l'asse delle x portandola sopra l'asse (simmetria assiale rispetto all'asse x)



Funzioni inverse

Se f: A→B è biunivoca, possiamo definire la **relazione inversa** che si indica con il simbolo **f^{-1}**. Tale relazione associa a ogni y ∈B la sua controimmagine x ∈ A

$$f^{-1}: y \rightarrow x \leftrightarrow f: x \rightarrow y$$

*Data una funzione **y = f(x)** come si fa a trovare la sua inversa **x = f $^{-1}$(y)**?*

Ecco le regole da seguire:

1 - per prima cosa dobbiamo vedere se la funzione è **invertibile**. Quindi verifichiamo che la funzione sia **biunivoca**. Se essa lo è allora si potrà trovare la funzione inversa;

2 - se la funzione non è biunivoca, andiamo a vedere se essa è **iniettiva**. Se la funzione è iniettiva (ma non suriettiva dato che essa non è biunivoca) allora la funzione è **invertibile** a condizione che **restringiamo l'immagine** ad un intervallo opportuno;

3 - se la funzione **non** è **iniettiva** essa **non** è neppure **invertibile** e dunque non possiamo trovare l'inversa della funzione data.

Funzioni inverse e grafico

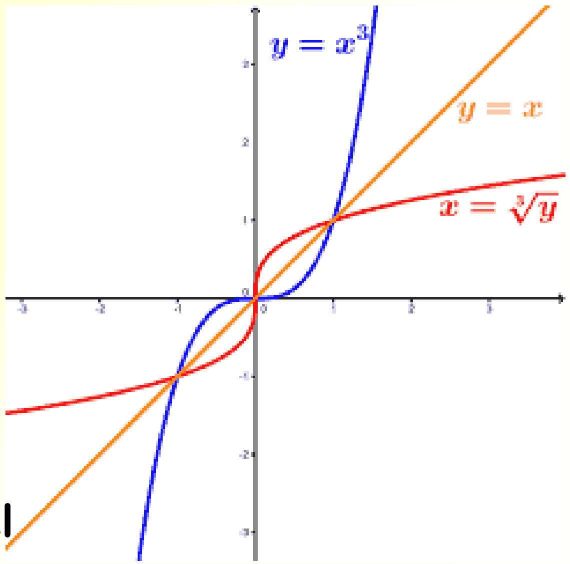
Se la funzione ***y* = *f(x)*** è **biunivoca** passiamo a trovare la sua inversa. Attraverso opportuni passaggi algebrici occorre passare da una funzione dove la ***x*** è la **variabile indipendente** e la ***y*** la **variabile dipendente** ad una funzione nella quale la ***y*** è la **variabile indipendente** e la ***x*** è la **variabile dipendente**.

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di funzioni inverse: dopo aver controllato che la funzione sia univoca e suriettiva basta scambiare fra loro le x e le y e poi esplicitare la y:

La funzione $y = x^3$ è biunivoca. Scambiamo fra loro la x e la y → $\mathbf{x = y^3}$

Ora esplicitiamo in funzione della y ed otteniamo la funzione inversa

$$\boxed{y = \sqrt[3]{x}}$$



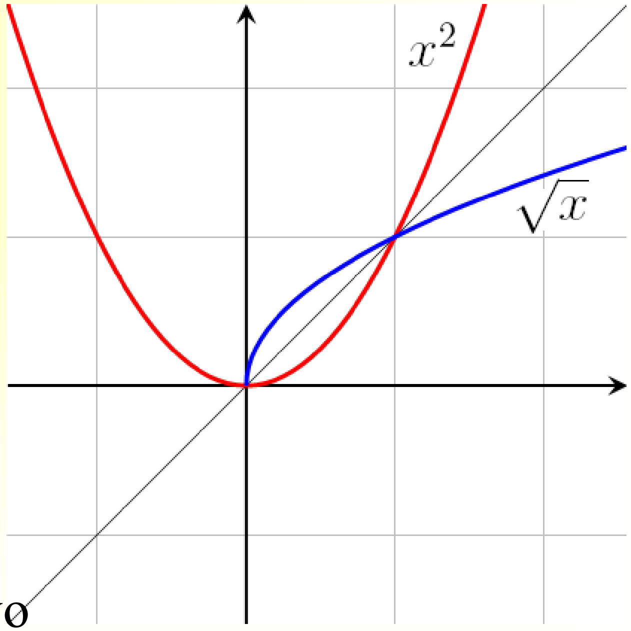
La funzione disegnata in rosso è la funzione inversa.
Ora osserviamo il grafico della funzione inversa f^{-1}:
esso è **SIMMETRICO** rispetto alla **bisettrice del 1° e del 3° quadrante** del grafico di *f* che, nell'immagine abbiamo indicato in azzurro.

Funzioni inverse e grafico

Consideriamo la funzione $y = x^2$.
La funzione data è la funzione di una **PARABOLA** avente il vertice nell'origine degli assi cartesiani.

Essa **non** è **iniettiva** e di conseguenza **non e' invertibile**.
Tuttavia, se facciamo delle **restrizioni**, possiamo renderla invertibile e calcolarne la **funzione inversa**.

Ad esempio, se consideriamo il **vertice** e **metà della parabola** la funzione diventa iniettiva e quindi invertibile.



cambiamo fra loro la x e la y $\rightarrow$ $\mathbf{x = y^2}$
esplicitiamo la y $\rightarrow$ $\mathbf{-y^2 = -x}$
cambiamo di segno $\rightarrow$ $\mathbf{y^2 = x}$
estraiamo la radice $\rightarrow$ $y = \pm\sqrt{x}$
per poterla considerare come funzione inversa consideriamo per es. solamente il radicale positivo

$$\boxed{y = \sqrt{x}}$$

Funzioni pari

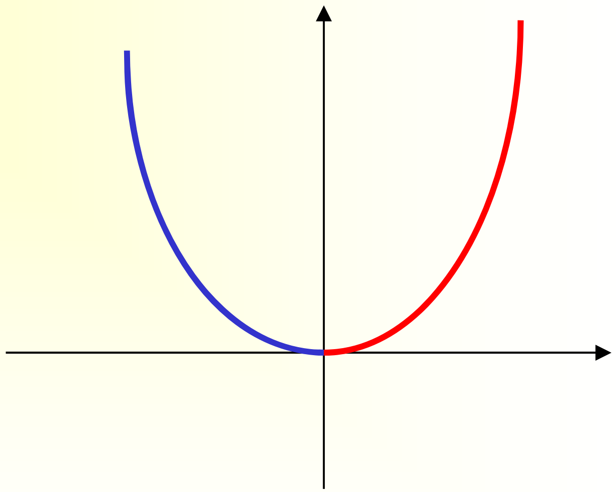
Una funzione si dice **pari** se cambiando di segno la x, la funzione non cambia di segno. In formula:

$$f(-x) = f(x)$$

In pratica significa che una funzione **pari è simmetrica rispetto all'asse y.**

Un esempio di funzione pari è dato da $\mathbf{y = x^2}$

Per le funzioni pari basterà costruire solo metà grafico e disegnare poi il simmetrico rispetto all'asse delle y (simmetria assiale).



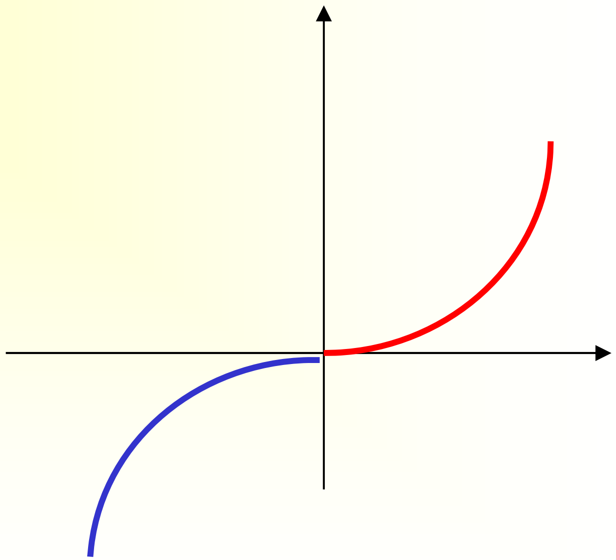
Funzioni dispari

Una funzione si dice dispari se cambiando di segno la x, anche la funzione cambia di segno. In formula:

$$f(-x) = -f(x)$$

In pratica significa che una funzione **dispari è simmetrica rispetto all'origine.**

Un esempio di funzione dispari è dato da $\mathbf{y = x^3}$
Per le funzioni pari basterà costruire solo metà grafico e disegnare poi il simmetrico rispetto all'origine (simmetria centrale).



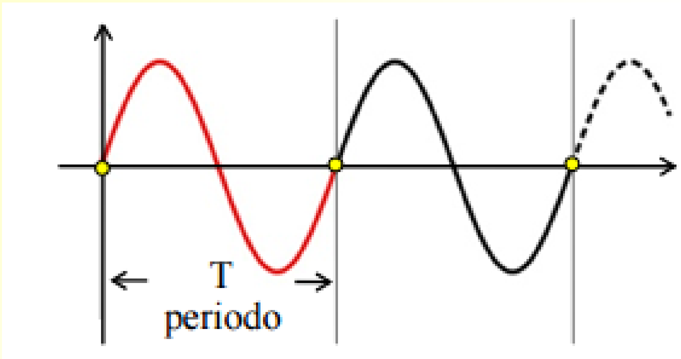
Funzioni periodiche

Una funzione si dice **periodica** se dopo un certo intervallo (periodo) si ripete. In formula:

$$f\,(x + T) = f\,(x)$$

con T (T > 0) periodo.

Un esempio semplice di funzione periodica è dato da **y = sen x** di periodo **2 Π**.

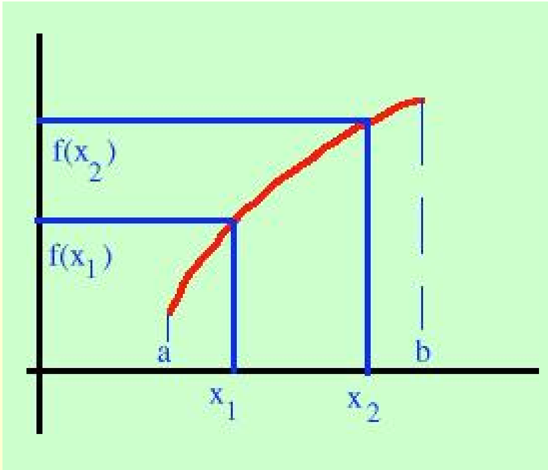


Infatti **sen(x+2kΠ)= sen (x)**.

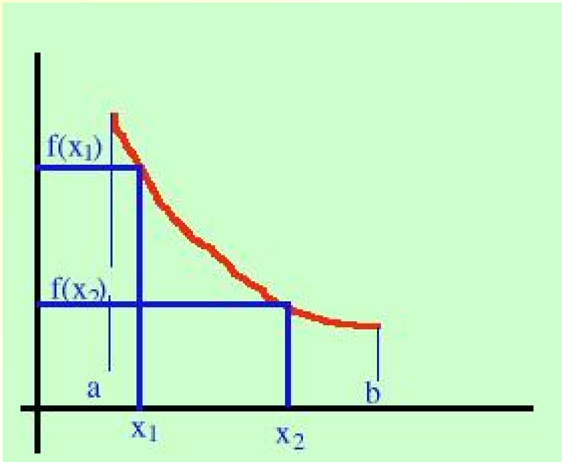
Per le funzioni periodiche basterà costruire il grafico solo per un periodo e poi ripeterlo sia a destra che a sinistra.

Funzioni crescenti e decrescenti

Si dice che la funzione y = f(x) **è crescente** nell' intervallo [a, b]
se **per tutti i punti dell'intervallo** [a,b], da
$x_1 < x_2$ segue $f(x_1) < f(x_2)$
cioè una funzione è crescente quando spostando il punto sulle x verso destra il punto sulle y si sposta verso l'alto.



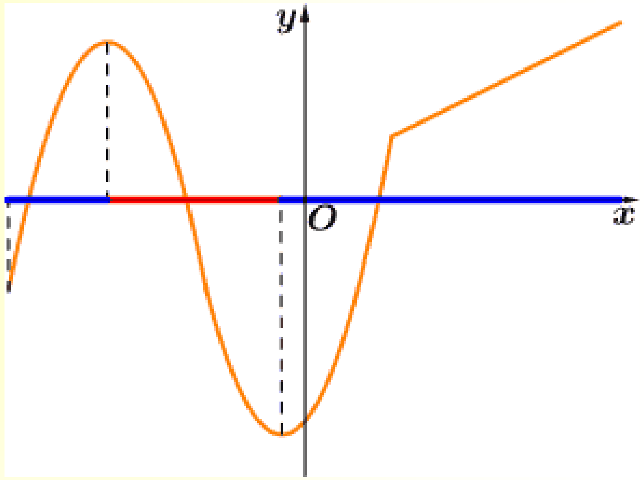
Si dice che la funzione y = f(x) **è decrescente** nell' intervallo [a, b]
se **per tutti i punti dell'intervallo**[a,b], da
$x_1 < x_2$ segue $f(x_1) > f(x_2)$
cioè una funzione è decrescente quando spostando il punto sulle x verso destra il punto sulle y si sposta verso il basso.



Funzione monotòna

Un funzione y = f(x) è **monotòna** in un intervallo se, in tale intervallo, essa è sempre crescente oppure è sempre decrescente.

Se una funzione non è monotòna nel suo dominio è possibile, nei casi più comuni, effettuare una suddivisione del dominio in opportuni intervalli in ciascuno dei quali la funzione sia monotòna. Tali intervalli si chiamano intervalli di **monotonìa**



Una funzione **monotòna** (in senso stretto) in un insieme D è una funzione biunivoca ed è pertanto **invertibile**.

Funzioni limitate, massimi e minimi assoluti

Sia **$y = f(x)$** l'equazione di una funzione di dominio D e codominio $C = f(D)$

f si dice limitata in D se l'insieme C è limitato

f si dice illimitata superiormente se C è illimitato superiormente

f si dice illimitata inferiormente se C è illimitato inferiormente

Si dice estremo superiore di f, l'estremo superiore dell'insieme C

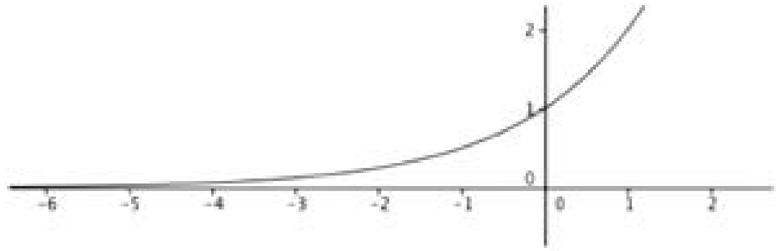
Si dice estremo inferiore di f, l'estremo inferiore dell'insieme C

Si dice massimo assoluto di f, il massimo (se esiste) dell'insieme C

Si dice minimo assoluto di f, il minimo (se esiste) dell'insieme C

Sia: $y = 2^x$

$\boxed{D = R}$ $\boxed{C = (0; +\infty)}$

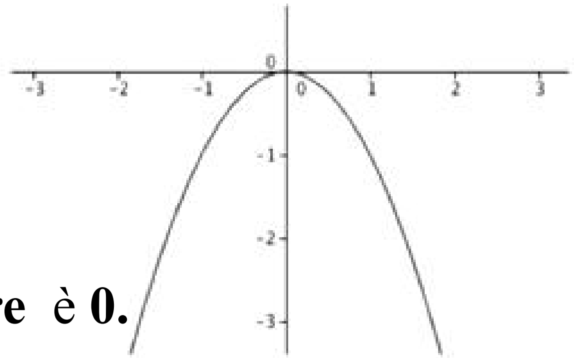


$0 \notin C$ perché non esiste alcun valore di x tale che $2^x = 0$.

L'estremo inferiore di $y = 2^x$ è **0**. **L'estremo superiore** è **$+\infty$.**

Sia: $y = -x^2$

$\boxed{D = R}$ $\boxed{C = (-\infty; 0]}$ $0 \in C$



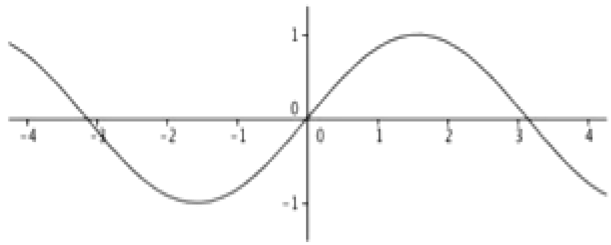
L'estremo inferiore di $y = -x^2$ è $-\infty$. **L'estremo superiore** è **0.**

Visto che $0 \in C$, **il massimo di** $y = -x^2$ è **0**

Sia: $y = sen(x)$

$\boxed{D = R}$ $\boxed{C = [-1; 1]}$

-1 e 1 appartengono al codominio



Il **minimo** di y = senx è **-1.** Il **massimo** y = senx è **1.**